UNIVERSIDADE da MADEIRA

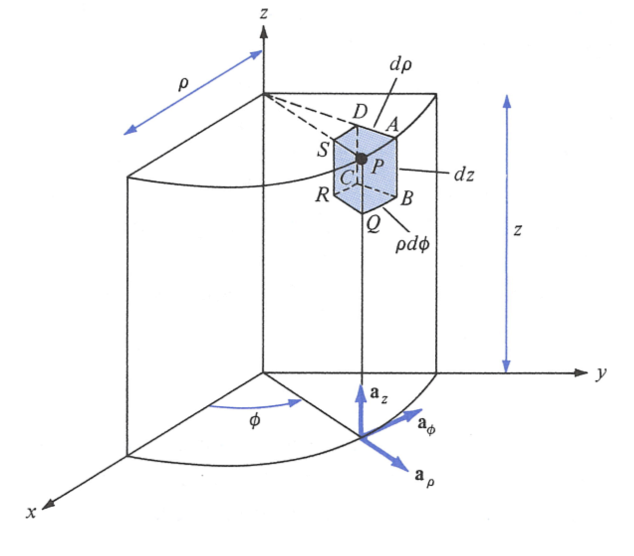
Electromagnetismo

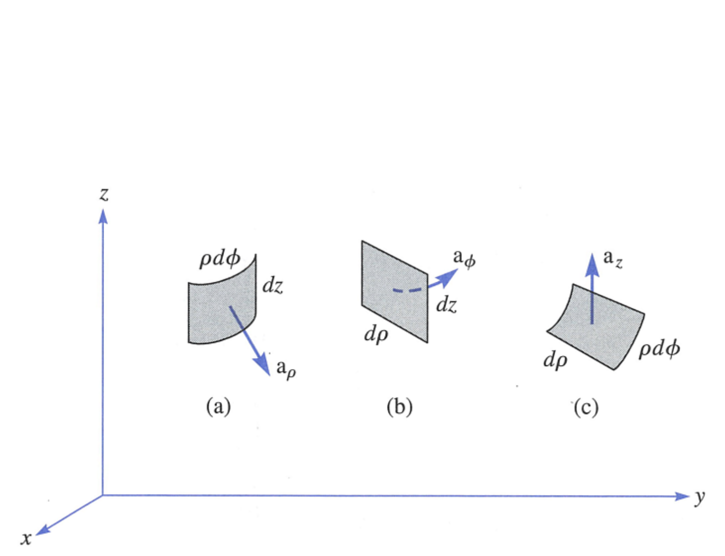
Série de exercícios 12

Nota: Os exercícios assinalados com ✠ serão resolvidos nas aulas.
Informação de referência:

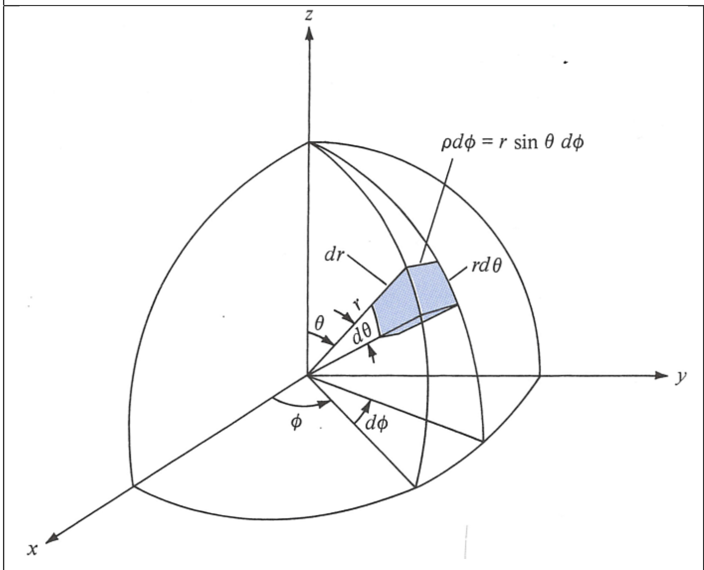
- Sistemas de coordenadas diferentes

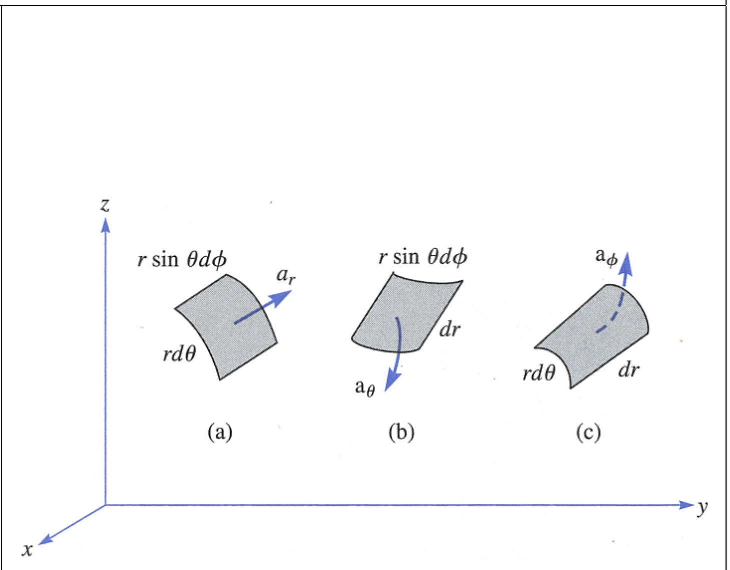
Coordenadas cilíndricas





Coordenadas esféricas





Elementos infinitesimais em sistemas de coordenadas diferentes (retirado de Sadiku p.53-57)			
Sistemas de coordenadas	deslocamento diferencial d$\mathbf{l}$	Área normal diferencial d$\mathbf{S}$	Volume diferencial dV
cartesianas	$\mathrm{d}x\mathbf{a}_x + \mathrm{d}y\mathbf{a}_y + \mathrm{d}z\mathbf{a}_z$	$\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathbf{a}_x$ $\mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathbf{a}_y$ $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathbf{a}_z$	$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
cilíndricas	$\mathrm{d}\rho\mathbf{a}_\rho + \rho\mathrm{d}\phi\mathbf{a}_\phi + \mathrm{d}z\mathbf{a}_z$	$\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z\mathbf{a}_\rho$ $\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z\mathbf{a}_\phi$ $\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\rho\mathbf{a}_z$	$\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z$
esféricas	$\mathrm{d}r\mathbf{a}_r + r\mathrm{d}\theta\mathbf{a}_\theta + r\sin\theta\mathrm{d}\phi\mathbf{a}_\phi$	$r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\mathbf{a}_r$ $r\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\mathbf{a}_\theta$ $r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathbf{a}_\phi$	$r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$

- O rotacional de $\mathbf{A}$ em coordenadas cartesianas (x, y, z) pode ser obtido através de:
$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$
- O rotacional de $\mathbf{A}$ em coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) pode ser obtido através de:
$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \mathbf{a}_\rho & \rho\mathbf{a}_\phi & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix}$$
- O rotacional de $\mathbf{A}$ em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) pode ser obtido através de:
$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & r\mathbf{a}_\theta & r\sin\theta\mathbf{a}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\phi \end{vmatrix}$$

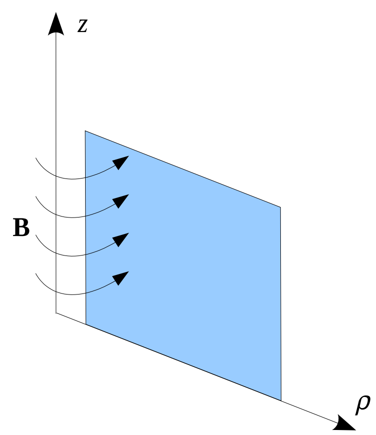
1. ✠ Considere o seguinte vector $\mathbf{A}$ em coordenadas cartesianas
$$\mathbf{A} = (y\cos ax)\,\mathbf{a}_x + (y + e^x)\,\mathbf{a}_z$$
determine $\nabla \times \mathbf{A}$ na origem.

2. ✠ Considere o seguinte vector $\mathbf{A}$ em coordenadas cilíndricas
$$\mathbf{A} = 5\rho\sin\phi\mathbf{a}_z$$
determine $\nabla \times \mathbf{A}$ em $(2, \pi, 0)$.

3. Considere o seguinte vector $\mathbf{A}$ em coordenadas cilíndricas
$$\mathbf{A} = 5e^{-\rho}\cos\phi\mathbf{a}_\rho - 5\cos\phi\mathbf{a}_z$$
determine $\nabla \times \mathbf{A}$ em $\left(2, \frac{3}{2}\pi, 0\right)$.

4. Considere o seguinte vector $\mathbf{A}$ em coordenadas esféricas
$$\mathbf{A} = 10\sin\theta\mathbf{a}_\theta$$
determine $\nabla \times \mathbf{A}$ em $\left(2, \frac{\pi}{2}, 0\right)$.

5. Em coordenadas cilíndricas, $\mathbf{B} = \frac{2.0}{\rho}\mathbf{a}_\phi$ (T). Determine o fluxo magnético que atravessa a superfície, ilustrada na figura, definida por $0.5 \le \rho \le 2.5\,\mathrm{m}; 0 \le z \le 2.0\,\mathrm{m}$.



6. Considere um filamento de fio que transporta uma corrente de 2.50 A ao longo do eixo dos z, no sentido positivo. Encontre o fluxo do campo magnético atavés da porção do plano

$\phi = \frac{\pi}{4}$ definida por $0.01 < \rho < 0.05\,\mathrm{m}; 0 < z < 2\,\mathrm{m}$.

7. ✠ Considere o potencial vector magnético $\mathbf{A} = -\frac{\rho^2}{4}\mathbf{a}_z\,\mathrm{Wb/\,m}$ (em coordenadas cilíndricas). Calcule o fluxo magnético total que atravessa a superfície $\phi = \frac{\pi}{2}; 1 \le \rho \le 2\,\mathrm{m}; 0 \le z \le 5\,\mathrm{m}$.

8. ✠ O potencial vectorial em coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) é dado por $\mathbf{A} = b\phi\cos a\rho\,\mathbf{a}_\rho + c\left(\phi + fe^{\frac{\rho}{d}}\right)\mathbf{a}_z$, onde $a = 2\,\mathrm{m}^{-1}$, $b = 32\,\mathrm{T\,m\,rad}^{-1}$, $c = 8\,\mathrm{T\,m\,rad}^{-1}$, $d = 2\,\mathrm{m}$, $f = \frac{\pi}{3}\,\mathrm{rad}$. Calcule o fluxo magnético total através da superfície rectangular definida por $1\,\mathrm{m} \le \rho \le 2\,\mathrm{m}; \phi = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}; 0 \le z \le 5\,\mathrm{m}$.

9. ✠ Uma distribuição de corrente origina um potencial vector magnético $\mathbf{A} = x^2y\mathbf{a}_x + y^2x\mathbf{a}_y - 4xyz\mathbf{a}_z\,\mathrm{Wb/\,m}$. Calcule:
   (a) $\mathbf{B}$ em $(-1, 2, 5)$ m
   (b) O fluxo do campo magnético através da superfície definida por $z = 1\,\mathrm{m}; 0 \le x \le 1\,\mathrm{m}; -1\,\mathrm{m} \le y \le 4\,\mathrm{m}$.

Soluções:
1) $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{a}_x - e^x\mathbf{a}_y - \cos ax\mathbf{a}_z$; $\nabla \times \mathbf{A}|_{(0,0,0)} = \mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$; 2) $\nabla \times \mathbf{A} = (5\cos\phi)\,\mathbf{a}_\rho - (5\sin\phi)\,\mathbf{a}_\phi$; $\nabla \times \mathbf{A}|_{(2,\pi,0)} = -5\mathbf{a}_\rho$; 3) $\nabla\times\mathbf{A} = \left(\frac{5}{\rho}\sin\phi\right)\mathbf{a}_\rho + \left(\frac{5}{\rho}e^{-\rho}\sin\phi\right)\mathbf{a}_z$; $\nabla \times \mathbf{A}|_{\left(2,\frac{3}{2}\pi,0\right)} = (-2.5)\,\mathbf{a}_\rho + \left(-\frac{2.5}{e^2}\right)\mathbf{a}_z$; 4) $\nabla \times \mathbf{A} = \frac{10\sin\theta}{r}\mathbf{a}_\phi$; $\nabla \times \mathbf{A}|_{\left(2,\frac{\pi}{2},0\right)} = 5\mathbf{a}_\phi$; 5) $\Phi_\mathbf{B} = 4.0\ln 5\,\mathrm{Wb} \approx 6.44\,\mathrm{Wb}$; 6) $\Phi_\mathbf{B} = 1.61\,\mu\mathrm{Wb}$. 7) $\Phi_\mathbf{B} = 3,75\,\mathrm{Wb}$; 8) $\Phi_\mathbf{B} = 44.80\,\mathrm{Wb}$; 9a) $\mathbf{B} = (20, 40, 3)$ T (ou $\mathrm{Wb\,m}^{-2}$); 9b) $\Phi_\mathbf{B} = 20\,\mathrm{Wb}$.