Cadeira: ELETROMAGNETISMO	**Época: Normal**

Ano lectivo: 2022/2023 (1º Semestre) **TESTE 1** (2022/11/10) **Duração:** 2 horas

Nome: ___________________________________ Número: ____________ Curso: **EET**

Cotação:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	T

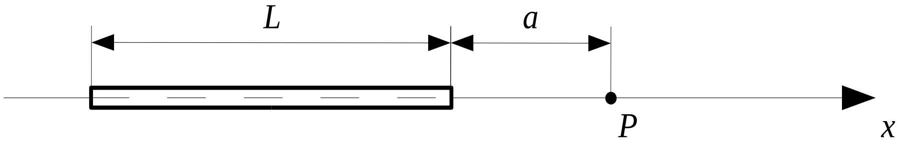
1. [1] Qual é o módulo da força entre um ião de sódio, Na^+, e um ião adjacente de cloro, Cl^-, num cristal de sal? A distância entre os iões é de $2,82 \times 10^{-10}$ m.

   Res: $F = \frac{\left(1.602\times10^{-19}\,\mathrm{C}\right)^2\,\mathrm{N\,m^2}}{4\pi 8.854\times10^{-12}\,\mathrm{C^2}(2.82\times10^{-10}\,\mathrm{m})^2} = 2.90\times10^{-9}\,\mathrm{N}$

2. [1] Qual deverá ser a distância entre as cargas pontuais $q_1 = 26,0\,\mu\mathrm{C}$ e $q_2 = -47,0\,\mu\mathrm{C}$ para que a força de interacção electrostática entre elas no vazio tenha uma magnitude de $5,70\,\mathrm{N}$?

   Res: $r = \sqrt{\frac{|q_1||q_2|}{4\pi\varepsilon_0 F}} = \sqrt{\frac{26{,}0\times10^{-6}\,\mathrm{C}\times47{,}0\times10^{-6}\,\mathrm{C}}{4\pi 8{,}854\times10^{-12}\,\mathrm{C^2\,N^{-1}\,m^{-2}}5{,}70\,\mathrm{N}}} = 1.39\,\mathrm{m}$

3. [2.5] A figura ilustra uma vara não condutora de comprimento L que possui uma carga $-q$ distribuída uniformemente ao longo do seu comprimento.



   (a) Qual é o campo eléctrico no ponto P na figura?

   (b) Simplifique a sua resposta da alínea anterior no caso limite $a \gg L$ e analize o sentido físico do resultado.

   Solução:

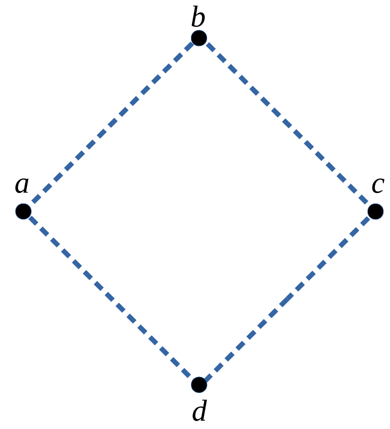
$$
\begin{aligned}
dE_x &= K\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{(L+a-x)^2}\\
E_x &= \int dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{x=0}^{x=L}\frac{dx}{(L+a-x)^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left.\frac{1}{L+a-x}\right|_{x=0}^{x=L}\\
E_x &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{L+a}\right) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{L}{a(L+a)}
\end{aligned}
$$

   Na forma vectorial: $\mathbf{E}_P = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{L}{a(L+a)}\mathbf{u}_x = -\frac{q/L}{4\pi\varepsilon_0}\frac{L}{a(L+a)}\mathbf{u}_x = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a(L+a)}\mathbf{u}_x$

   b) No caso limite $a \gg L$: $\mathbf{E}_P \approx -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a^2}\mathbf{u}_x$. Ou seja, para $a \gg L$ é como se a barra fosse uma carga pontual.

4. [2] Considere a figura que se segue onde os pontos a, b, c, d representam os vértices de um quadrado

imaginário cujas arestas medem 10 cm.



(a) Calcule o campo eléctrico no ponto c, no caso em que nos pontos a, b e d estão colocadas as cargas de, respectivamente, $-4\,\mu\mathrm{C}$, $3\,\mu\mathrm{C}$, $3\,\mu\mathrm{C}$.

(b) Calcule o campo eléctrico no centro do quadrado, no caso em que nos pontos a, b, c e d estão colocadas as cargas de, respectivamente, $-4\,\mu\mathrm{C}$, $3\,\mu\mathrm{C}$, $-4\,\mu\mathrm{C}$, $3\,\mu\mathrm{C}$.

Solução:

a) Seja o centro do quadrado a origem do nosso sistema de eixos xy.

$\mathbf{E}_c = \mathbf{E}_{ca} + \mathbf{E}_{cb} + \mathbf{E}_{cd}$

$\mathbf{E}_{ca} = \left(-\frac{K_e|q_a|}{r_{ca}^2}; 0\right) \quad \mathbf{E}_{cb} = \left(\frac{K_e|q_b|}{r_{cb}^2}\cos(45\,^\circ); -\frac{K_e|q_b|}{r_{cb}^2}\sin(45\,^\circ)\right) \quad \mathbf{E}_{cd} = \left(\frac{K_e|q_d|}{r_{cd}^2}\cos(45\,^\circ); \frac{K_e|q_d|}{r_{cd}^2}\sin(45\,^\circ)\right)$

$r_{cb} = r_{cd} = l = 0.10\,\mathrm{m} \quad ; \quad q_b = q_d \quad ; \quad r_{ca} = \sqrt{0.1^2 + 0.1^2} = \frac{\sqrt{2}}{10}$

$\mathbf{E}_c = \left(-\frac{K_e|q_a|}{r_{ca}^2} + \frac{K_e|q_b|}{r_{cb}^2}\cos(45\,^\circ) + \frac{K_e|q_d|}{r_{cd}^2}\cos(45\,^\circ); 0\right) = K_e\left(-\frac{|q_a|}{\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2} + \frac{2|q_b|}{\left(\frac{1}{10}\right)^2}\cos(45\,^\circ); 0\right)$

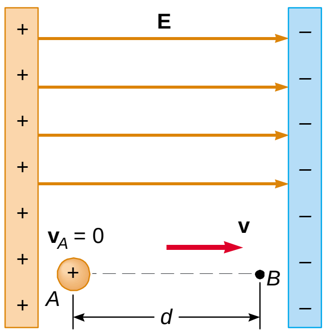
$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{100|q_a|}{2} + 2\times 100\,|q_b|\cos(45\,^\circ); 0\right)$

$= \frac{100}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{|q_a|}{2} + 2\,|q_b|\cos(45\,^\circ); 0\right) = \frac{100}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{4\times10^{-6}}{2} + 2\times 3\times 10^{-6}\cos(45\,^\circ); 0\right)$

$= \frac{100}{4\pi(8.854\times10^{-12})}\times 10^{-6}\left(-2 + 6\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right) = (2.0156277\times10^6; 0) \approx (2.02\times10^6; 0)\ \mathrm{N\,C^{-1}}$

b) $0\ \mathrm{N\,C^{-1}}$

5. [2.5] Um protão é largado no ponto A a partir do repouso num campo eléctrico uniforme que tem uma magnitude de $8,0\times10^4\,\mathrm{V\,m^{-1}}$ (ver figura). O protão sofre um deslocamento $d = 0,50\,\mathrm{m}$ na direcção do campo eléctrico, até ao ponto B. Considere que a carga do protão é $1.60\times10^{-19}\,\mathrm{C}$ e que a sua massa é $1.67\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$.



Determine:

(a) a diferença de potencial entre os pontos A e B ($V_b - V_a$).

(b) a variação de energia potencial do sistema protão-campo para este deslocamento.

(c) a velocidade do protão após completar o deslocamento de $0,50\,\mathrm{m}$ no campo eléctrico.

Resp: a) $\Delta\varphi = -4,0\times10^4\,\mathrm{V}$; b) $\Delta U = -6,4\times10^{-15}\,\mathrm{J}$; c) $v = 2,8\times10^6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

a) $\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\int_a^b E dl\cos 0 = -E\int_a^b dl = -Ed = -\left(8,0\times10^4\,\mathrm{V\,m^{-1}}\right)(0,50\,\mathrm{m}) =$ $-4,0\times10^4\,\mathrm{V}$

b) A ddp entre A e B é definida como a variação da energia potencial do sistema quando uma carga de teste é movida entre os pontos dividindo pela carga de teste q_0, i.e.: $\Delta\varphi = \frac{\Delta U}{q_0}$.

No nosso caso a carga é a carga do protão ficamos com: $\Delta U = q\Delta\varphi = \left(1,6\times10^{-19}\,\mathrm{C}\right)\left(-4,0\times10^4\,\mathrm{J\,C}\right.$ $-6,4\times10^{-15}\,\mathrm{J}$

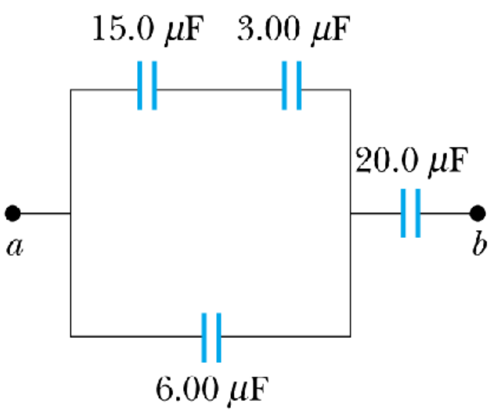
O sinal negativo significa que o protão perde energia potencial, o que é natural pois o protão é acelerado pelo campo, o que faz com que ganhe energia cinética.

c) O sistema carga-campo é isolado $\Longrightarrow \Delta E_{mec} = 0 \Leftrightarrow \Delta E_c + \Delta U = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}mv^2 - 0\right) + \left(-6,4\times10^{-15}\,\mathrm{J}\right) = 0$

A massa do protão é $1,67\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$, ficamos com: $\frac{1}{2}\left(1,67\times10^{-27}\,\mathrm{kg}\right)v^2 + \left(-6,4\times10^{-15}\,\mathrm{J}\right) = 0$

Resolvendo em ordem a v obtemos: $v = \sqrt{\frac{6,4\times10^{-15}\,\mathrm{J}}{\frac{1}{2}(1,67\times10^{-27}\,\mathrm{kg})}} = 2.8\times10^6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

6. [2] Quatro condensadores estão ligados como se ilustra na figura.



(a) Encontre a capacidade equivalente entre os pontos a e b.

(b) Calcule a carga em cada condensador sabendo que a diferença de potencial entre os pontos a e b é $V_{ab} = 15.0\,\mathrm{V}$.

Solução:

a) Seja C_x a capacidade dos três condensadores da esquerda. Seja C_y a capacidade do condensador da direita. Seja C_Z a capacidade equivalente da associação dos dois condensadores de cima:

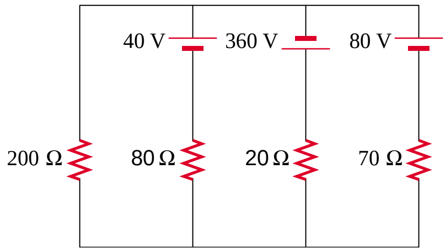
$$\begin{aligned} C_z &= \frac{(15.0\times3.0)\times\left(10^{-6}\right)^2}{(15.0+3.0)\times10^{-6}} = 2.5\times10^{-6}\,\mathrm{F} \\ C_y &= 20.0\times10^{-6}\,\mathrm{F} \\ C_x &= C_z + 6.00\times10^{-6} = 8.5\times10^{-6}\,\mathrm{F} \\ C_{eq} &= \frac{C_x C_y}{C_x + C_y} = \frac{\left(8.5\times10^{-6}\right)\left(20.0\times10^{-6}\right)}{8.5\times10^{-6} + 20.0\times10^{-6}} \approx 5.96\times10^{-6}\,\mathrm{F} \end{aligned}$$

b) $C_{eq} = \frac{Q}{V_{ab}} \longrightarrow Q = V_{ab}C_{eq} = 15.0\times5.96\times10^{-6} = 8.94\times10^{-5}\,\mathrm{C}$. Esta é a carga total. E é também a carga total no condensador da direita. Vamos ver qual a diferença de potencial nesse condensador: $C_y = \frac{Q}{V_y} \longrightarrow V_y = \frac{Q}{C_y} = \frac{8.94\times 10^{-5}\,\mathrm{C}}{20.0\times 10^{-6}\,\mathrm{F}} = 4.47\,\mathrm{V}$. Assim a diferença de potencial nos condensadores da esquerda é: $V_x = 15.0 - 4.47 = 10.53\,\mathrm{V}$.

$Q_z = C_z \times V_z = 2.5 \times 10^{-6}\,\mathrm{F} \times 10.53\,\mathrm{V} = 2.63 \times 10^{-5}\,\mathrm{C}$.

A carga no condensador de $6.00\,\mathrm{F}$ é $6.00 \times 10^{-6}\,\mathrm{F} \times 10.53\,\mathrm{V} = 6.32 \times 10^{-5}\,\mathrm{C}$.

7. [3] Considere o circuito representado na figura. Calcule o valor da corrente que passa através de cada resistência e a diferença de potencial na resistência de $200\,\Omega$.



$\boxed{\text{Solução:}}$

Onde assumi: $\xrightarrow{I_1}\overset{I_2 I_3 I_4}{\downarrow\downarrow\downarrow}$

$$\begin{bmatrix} I_1 = I_2 + I_3 + I_4 \\ 40 = -I_1(200) - I_2(80) \\ 40 + 360 = -I_2(80) + I_3(20) \\ 360 + 80 = -I_4(70) + I_3(20) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} I_1 = I_2 + I_3 + I_4 \\ 40 = -(I_2 + I_3 + I_4)(200) - I_2(80) \\ 400 = -80I_2 + 20I_3 \\ 440 = -70I_4 + 20I_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 = I_2 + I_3 + I_4 \\ 40 = -200(I_3 + I_4) - 280I_2 \\ 400 + 80I_2 = 20I_3 \\ 440 + 70I_4 = 20I_3 \end{bmatrix} \longrightarrow 400 + 80I_2 = 440 + 70I_4 \longrightarrow \frac{80I_2 - 40}{70} = I_4$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} I_1 = I_2 + I_3 + I_4 \\ 40 = -200\left(\frac{400+80I_2}{20} + \frac{80I_2-40}{70}\right) - 280I_2 \\ 400 + 80I_2 = 20I_3 \\ 440 + 70I_4 = 20I_3 \end{bmatrix} \longrightarrow 40 + 200\times 20 - 200\times\frac{40}{70} = -200\left(\frac{5600I_2 + 1600I_2}{20\times 70}\right) - 280I_2$$

$\longrightarrow \frac{27480}{7} = -\frac{9160}{7}I_2 \longrightarrow I_2 = -\frac{27480}{9160} = -3.0\,\mathrm{A}$

$I_3 = \frac{400+80I_2}{20} = \frac{400+80(-3.0)}{20} = 8.0\,\mathrm{A}$

$I_4 = \frac{20I_3 - 440}{70} = \frac{20(8.0)-440}{70} = -4.0\,\mathrm{A}$

$I_1 = I_2 + I_3 + I_4 = -3.0 + 8.0 - 4.0 = 1.0\,\mathrm{A}$

A diferença de potencial na resistência de $200\,\Omega$ é: $V = RI = 200\,\Omega \times 1.0\,\mathrm{A} = 200\,\mathrm{V}$.

Nota: Solução do sistema pelo Maple: $\begin{bmatrix} I_1 = I_2 + I_3 + I_4 \\ 40 = -I_1(200) - I_2(80) \\ 40 + 360 = -I_2(80) + I_3(20) \\ 360 + 80 = -I_4(70) + I_3(20) \end{bmatrix}$, Solution is: $[I_1 = 1, I_2 = -3, I_3 =$

8. [2] O elemento de aquecimento num forno é um fio de níquel-crómio com $1,0\,\mathrm{m}$ de comprimento. O fio pode suportar uma corrente máxima de $16\,\mathrm{A}$ e este valor realiza-se quando a diferença de potencial aplicada às extremidades do fio é de $120\,\mathrm{V}$. A resistividade do níquel-crómio é $1,0 \times 10^{-6}\,\Omega\,\mathrm{m}$.

(a) Qual é o diâmetro do fio?

(b) Qual a potência máxima consumida pelo forno?

$\boxed{\text{Solução:}}$

a) $\begin{cases} R = \frac{V}{I} = \frac{120\,\mathrm{V}}{16\,\mathrm{A}} = 7,5\,\Omega \\ j = \sigma E = \sigma \frac{\Delta V}{l} = \frac{\Delta V}{\rho l} \\ j = \frac{I}{A} \\ \sigma = \frac{1}{\rho} \\ A = \pi r^2 \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \end{cases} \implies \frac{\Delta V}{\rho l} = \frac{I}{A} \Leftrightarrow A = \frac{I\rho l}{\Delta V} = \frac{\rho l}{R} = \frac{\left(1{,}0\times 10^{-6}\,\Omega\,\mathrm{m}\right)(1\,\mathrm{m})}{7{,}5\,\Omega} = 1.3 \times$
$10^{-7}\,\mathrm{m}^2$

$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{1{,}3\times 10^{-7}\,\mathrm{m}^2}{\pi}} = 2,0 \times 10^{-4}\,\mathrm{m} = 0,2\,\mathrm{mm}$

$d = 2r = 2 \times 0.2\,\mathrm{mm} = 0.4\,\mathrm{mm}.$

b) $P = VI = 120\,\mathrm{V} \times 16\,\mathrm{A} = 1920\,\mathrm{W}.$

9. [2]

(a) Escreva a fórmula para a força que actua sobre uma partícula de uma carga q que se move a uma velocidade $\mathbf{v}$ em campos eléctrico $\mathbf{E}$ e magnético $\mathbf{B}$.

Resposta___

(b) Calcule o módulo da força para os seguintes valores: a carga é de $10^{-10}\,\mathrm{C}$, a velocidade em $\mathrm{m/s}$ é $(15, 0, 0)$, o campo eléctrico em $\mathrm{V/km}$ é $(12, 10, 43)$, o campo magnético em mT é $(1, 3, 5)$.

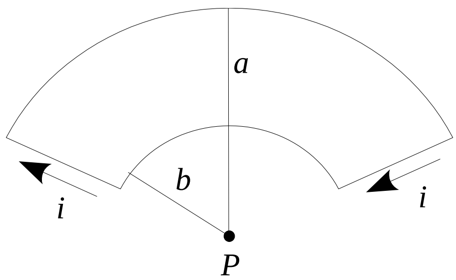
Resposta___

Resp: a) $\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$

b) $\mathbf{F} = 10^{-10}\left(10^{-3}\begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 43 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 15 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} 10^{-3}\right) = 10^{-13}\left(\begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 43 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -75 \\ 45 \end{bmatrix}\right),$

$F = 10^{-13}\sqrt{12^2 + 65^2 + 88^2}\,\mathrm{N} = 1.10 \times 10^{-11}\,\mathrm{N}$

10. [2] No circuito da figura, os segmentos curvados são arcos de círculo com raios a e b e com o centro P, os segmentos rectilíneos são dirigidos radialmente. O circuito é percorrido pela corrente i. Encontre o campo magnético no ponto P.



$\boxed{\text{Solução:}}$

A magnitude do campo magnético provocado por um arco de fio é dada por: $B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}\phi$.

Vamos confirmar:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

a magnitude do campo é dada por $dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idlr\sin(90\,^\circ)}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2}$. Assim o campo total é

$$B = \int dB = \int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2} = \int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ird\phi}{r^2} = \int_0^\phi \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\phi}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r}\phi.$$

Assim, O segmento de raio a provoca um campo magnético dado por $B_a = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{a}\phi$ (dirigido para dentro da página). O segmento de raio b provoca um campo magnético dado por $B_b = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{b}\phi$ (dirigido para fora da página). O campo magnético total é dado por

$$B = B_b - B_a = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{b}\phi - \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{a}\phi = \frac{\mu_0 I\phi}{4\pi}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$