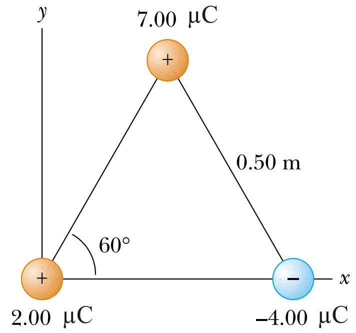
Cadeira: **ELETROMAGNETISMO**		Época: **Normal**	
Ano lectivo:	2023/2024 (1º Semestre)	**TESTE 1** (2023/11/22)	**Duração:** 2 horas

Nome: ________________________________ Número: ____________ Curso: **EET**

Cotação:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	T

1. [2] Três cargas pontuais estão localizadas nas extremidades de um triângulo equilátero tal como é mostrado na figura. Calcule a força eléctrica resultante na carga de $7.00\,\mu$C



Solução:

As forças que actuam na carga de $7.00\,\mu$C são:

$\mathbf{F}_{12} = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \widehat{r}_{12}$

$\mathbf{F}_{13} = k_e \frac{q_1 q_3}{r_{13}^2} \widehat{r}_{13}$

$\widehat{r}_{12} = \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$

$\widehat{r}_{13} = \frac{\mathbf{r}_{13}}{r_{13}} = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|}$

Vamos considerar a origem do nosso referencial na carga de $2.00\,\mu$C

$\widehat{r}_{12} = \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \frac{0.50(\cos(60\,°);\sin(60\,°))}{0.50} = (\cos(60\,°);\sin(60\,°))$

$\widehat{r}_{13} = \frac{\mathbf{r}_{13}}{r_{13}} = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|} = \frac{0.50(\cos(60\,°);\sin(60\,°)) - 0.50(1;0)}{0.50} = (\cos(60\,°);\sin(60\,°)) - (1;0)$

$\mathbf{F}_{12} = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \widehat{r}_{12} = 8.99\times10^9 \frac{\left(7.00\times10^{-6}\right)\left(2.00\times10^{-6}\right)}{(0.500)^2} (\cos(60\,°);\sin(60\,°)) = 0.503\,(\cos(60\,°);\sin(60\,°))$

$\mathbf{F}_{13} = k_e \frac{q_1 q_3}{r_{13}^2} \widehat{r}_{13} = 8.99\times10^9 \frac{\left(7.00\times10^{-6}\right)\left(-4.00\times10^{-6}\right)}{(0.500)^2} ((\cos(60\,°);\sin(60\,°)) - (1;0))$

$= -1.01\,((\cos(60\,°);\sin(60\,°)) - (1;0))$

A força resultante é: $\mathbf{F}_r = (F_{12x} + F_{13x}; F_{12y} + F_{13y}) =$

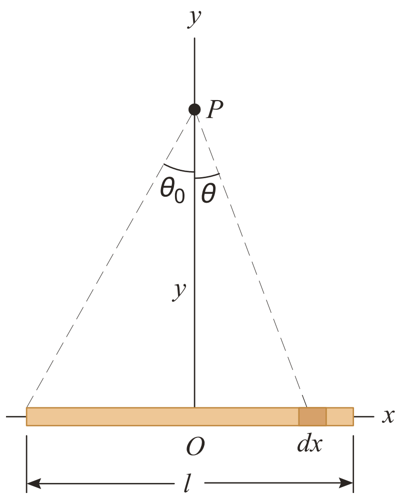
$= (0.503\cos(60\,°) - 1.01\,(\cos(60\,°) - 1); 0.503\sin(60\,°) - 1.01\sin(60\,°))$

$= (0.756; -0.439)$ N

O módulo da força resultante é $F_1 = \sqrt{(0.756)^2 + (-0.439)^2} = 0.874\,\text{N}$

2. [3] Uma vara fina de comprimento l com uma carga de densidade linear λ encontra-se no eixo x, como se mostra na figura. Calcule o módulo do campo eléctrico no ponto P, a uma distância y

perpendicular à vara no seu ponto médio. Informação de referência: $\int \frac{dx}{(y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{y^2\sqrt{y^2+x^2}}$+const.



Resp: $E = \frac{2K_e\lambda \sin\theta_0}{y}$ ou $E = \frac{2K_e\lambda l}{2y\sqrt{(l/2)^2+y^2}}$.

Vamos calcular o campo eléctrico provocado pela parte da vara que se encontra à direita do eixo dos y. Depois iremos adicionar a contribuição da parte esquerda da vara. Por uma questão de simetria vemos que as duas contribuições quando adicionadas não irão produzir campo no ponto P segundo a direcção x, pois as componentes segundo x irão anular-se. Assim basta calcularmos a componente segundo y da parte direita da vara e multiplicarmos esse resultado por dois ($E_P = 2 \times E_{Py\_direita}$, onde $E_{Py\_direita}$ é a componente y do campo provocado pela parte da direita da vara no ponto P, que por uma questão de simplificação de escrita passará a designar-se por E_{Py}).

$E_{Py} = \int dE_{Py} = \int \cos\theta dE_P,$ nota: $\cos\theta = \frac{E_{Py}}{E_P}$ e $\cos\theta = \frac{y}{r}$

$= \int \frac{y}{r}\frac{k_e dq}{r^2} = \int_0^{l/2} \frac{yk_e\lambda dx}{r^3} = yk_e\lambda \int_0^{l/2} \frac{dx}{r^3} = yk_e\lambda \int_0^{l/2} \frac{dx}{\left((x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\right)^3} = yk_e\lambda \int_0^{l/2} \frac{dx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

$= yk_e\lambda \left[\frac{x}{y^2\sqrt{y^2+x^2}}\right]_{x=0}^{x=\frac{l}{2}} = yk_e\lambda \left(\frac{\frac{l}{2}}{y^2\sqrt{y^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2}}\right) = \frac{k_e\lambda l}{2y\sqrt{y^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2}}.$

$E_P = 2 \times E_{Py\_direita} = 2 \times \frac{k_e\lambda l}{2y\sqrt{y^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2}} = \frac{k_e\lambda l}{y\sqrt{y^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2}}$

Uma vez que: $\sin\theta_0 = \frac{l/2}{\sqrt{y^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2}}$

Esta fórmula ainda pode reescrita como: $E_P = \frac{k_e\lambda 2\sin\theta}{y}$.

3. [2] Considere uma carga de 2 C que se encontra numa região do espaço onde o campo eléctrico é dado por $\mathbf{E} = (Cy; Dx; F)$, com $C = D = 1\,\mathrm{kV/m^2}$ e $F = 2\,\mathrm{kV/m}$. Determine o trabalho efectuado no transporte da carga de 2 C do ponto B com coordenadas, em m, $(1; 0; 1)$ para o ponto A com coordenadas, em m, $(0,8; 0,6; 1)$.

$\boxed{\text{Solução:}}$ $W_{BA} = \int_B^A \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = \int_B^A (-\mathbf{F}_e)\cdot d\mathbf{l} = -q_0\int_B^A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$

$\mathbf{E} = (y,x,2) \times 10^3\,\mathrm{V/m}$

Genericamente $d\mathbf{l} = dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z$.

$W_{AB} = -q_0 \times 10^3 \int_B^A (y,x,2)\cdot(dx, dy, dz) = -q_0 \times 10^3 \left(\int_{(1,0,1)}^{(0.8,0.6,1)} ydx + \int_{(1,0,1)}^{(0.8,0.6,1)} xdy + \int_{(1,0,1)}^{(0.8,0.6,1)} 2dz\right)$

Vamos determinar a equação da recta que liga os dois pontos $B\,(1, 0, 1)$ a $A\,(0.8, 0.6, 1)$.

$y = mx + b$, com $m = \frac{0.6-0}{0.8-1} = -3.0 \longrightarrow y = -3.0x + b$ Vamos determinar b: Um dos pontos pertencentes à recta é o ponto B. Assim, $0 = -3.0 \times 1 + b \longrightarrow b = 3$. Logo $y = -3.0x + 3$ ou $x = 1 - \frac{y}{3}$

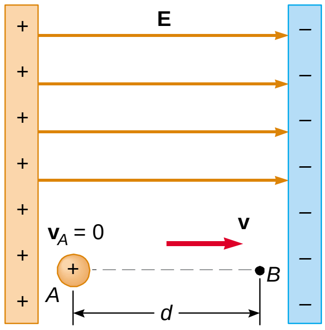
$W_{AB} = -q_0 \times 10^3 \left(\int_{(1,0,1)}^{(0.8,0.6,1)} (-3.0x + 3)\, dx + \int_{(1,0,1)}^{(0.8,0.6,1)} \left(1 - \frac{y}{3}\right) dy + \int_{(1,0,1)}^{(0.8,0.6,1)} 2dz \right)$

$= -q_0 \times 10^3 \left(-3.0 \int_{(1,0,1)}^{(0.8,0.6,1)} x dx + 3 \int_{(1,0,1)}^{(0.8,0.6,1)} dx + \int_{(1,0,1)}^{(0.8,0.6,1)} dy - \int_{(1,0,1)}^{(0.8,0.6,1)} \frac{y}{3} dy \right)$

$= -2 \times 10^3 \left(-3.0 \times \left. \frac{x^2}{2} \right|_1^{0.8} + 3 \times x|_1^{0.8} + y|_0^{0.6} - \left. \frac{y^2}{6} \right|_0^{0.6} \right)$

$= -2 \times 10^3 \left(-3.0 \times \left(\frac{0.8^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right) + 3 \times (0.8 - 1) + (0.6 - 0) - \frac{1}{6} (0.6^2 - 0^2) \right) = -0.96 \times 10^3\,\mathrm{J} = -960\,\mathrm{J}.$

4. [2] Um protão é largado no ponto A a partir do repouso num campo eléctrico uniforme que tem uma magnitude de $8,0 \times 10^4\,\mathrm{V\,m^{-1}}$ (ver figura). O protão sofre um deslocamento $d = 0,50\,\mathrm{m}$ na direcção do campo eléctrico, até ao ponto B. Considere que a carga do protão é $1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ e que a sua massa é $1.67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$.



Determine:

(a) a diferença de potencial entre os pontos A e B $(V_b - V_a)$.

(b) a variação de energia potencial do sistema protão-campo para este deslocamento.

(c) a velocidade do protão após completar o deslocamento de $0,50\,\mathrm{m}$ no campo eléctrico.
Resp: a) $\Delta\varphi = -4,0 \times 10^4\,\mathrm{V}$; b) $\Delta U = -6,4 \times 10^{-15}\,\mathrm{J}$; c) $v = 2,8 \times 10^6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
a) $\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_a^b Edl \cos 0 = -E \int_a^b dl = -Ed$
$= -\left(8,0 \times 10^4\,\mathrm{V\,m^{-1}}\right)(0,50\,\mathrm{m}) = -4,0 \times 10^4\,\mathrm{V}$
b) A ddp entre A e B é definida como a variação da energia potencial do sistema quando uma carga de teste é movida entre os pontos dividindo pela carga de teste q_0, i.e.: $\Delta\varphi = \frac{\Delta U}{q_0}$.
No nosso caso a carga é a carga do protão ficamos com:
$\Delta U = q\Delta\varphi = (1,6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}) \left(-4,0 \times 10^4\,\mathrm{J\,C^{-1}}\right) = -6,4 \times 10^{-15}\,\mathrm{J}$
O sinal negativo significa que o protão perde energia potencial, o que é natural pois o protão é acelerado pelo campo, o que faz com que ganhe energia cinética.
c) O sistema carga-campo é isolado $\Longrightarrow \Delta E_{mec} = 0 \Leftrightarrow \Delta E_c + \Delta U = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}mv^2 - 0\right) + (-6,4 \times 10^{-15}\,\mathrm{J}) = 0$
A massa do protão é $1,67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$, ficamos com: $\frac{1}{2}\left(1,67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}\right) v^2 + (-6,4 \times 10^{-15}\,\mathrm{J}) = 0$
Resolvendo em ordem a v obtemos: $v = \sqrt{\frac{6,4 \times 10^{-15}\,\mathrm{J}}{\frac{1}{2}(1,67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg})}} = 2.8 \times 10^6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

5. [1.5] Dois condensadores, $C_1 = 25.0\,\mu\mathrm{F}$ e $C_2 = 5.00\,\mu\mathrm{F}$, estão ligados em paralelo e são carregados por uma fonte de tensão de $100\,\mathrm{V}$.

(a) Calcule a energia total armazenada nos dois condensadores

(b) Imagine agora que os condensadores se encontram ligados em série. Qual seria a diferença de potencial necessária por forma a que o sistema armazenasse a mesma quantidade de energia do que a calculada nas condições da alínea anterior?

Resp: a) $U=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}\left(C_1+C_2\right)V^2=\frac{1}{2}\left(25.0\times10^{-6}+5.00\times10^{-6}\right)\left(100\right)^2=0.150\,\mathrm{J}$

b) Neste caso temos que a capacidade dos condensadores é diferente. Vamos calculá-la: $\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\rightarrow C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}=\frac{25.0\times10^{-6}\times5.00\times10^{-6}}{25.0\times10^{-6}+5.00\times10^{-6}}=\frac{125}{30}\times10^{-6}\,\mathrm{F}\approx4.17\times10^{-6}\,\mathrm{F}$

$U=\frac{1}{2}CV^2\rightarrow\frac{2U}{C}=V^2\rightarrow V=\sqrt{\frac{2U}{C}}=\sqrt{\frac{2\times0.150}{\frac{125}{30}\times10^{-6}}}\approx268\,\mathrm{V}$

6. [2] A densidade de corrente num fio cilíndrico de raio $R=2,0\,\mathrm{mm}$ é uniformemente distribuída na secção do fio e é $j=2,0\times10^5\,\mathrm{A/\,m^2}$.

(a) Determine a corrente que passa na parte do fio entre as distâncias radiais $\frac{R}{2}$ e R.

(b) Suponha que afinal a densidade de corrente na secção varia com a distância radial r na forma $j=ar^2$, onde $a=3,0\times10^{11}\,\mathrm{A/\,m^4}$. Determine a corrente que passa na mesma parte do fio nestas circunstâncias.

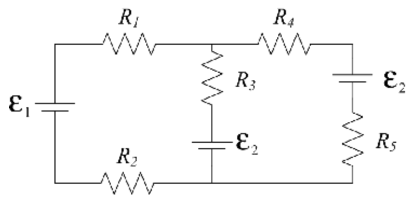
a) $I=\int\limits_S\mathbf{j}\cdot d\mathbf{S}=jA=j\left(\pi R^2-\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2\right)=j\pi\left(\frac{3}{4}R^2\right)=\frac{3}{4}\times2.0\times10^5\,\mathrm{A/\,m^2}\times\pi\times\left(2.0\times10^{-3}\,\mathrm{m}\right)^2=$ $0.6\pi\,\mathrm{A}=1.885\,0\,\mathrm{A}\approx1.9\,\mathrm{A}$

b) $I=\int\limits_S\mathbf{j}\cdot d\mathbf{S}=\int\limits_S jdS=\int\limits_{r=\frac{R}{2}}^{r=R}ar^2\left(2\pi rdr\right)=2\pi a\int\limits_{r=\frac{R}{2}}^{r=R}r^3dr=2\pi a\left.\frac{r^4}{4}\right|_{r=\frac{R}{2}}^{r=R}=\frac{\pi a}{2}\left(R^4-\left(\frac{R}{2}\right)^4\right)$

$=\frac{\pi a}{2}\left(R^4-\frac{R^4}{16}\right)=\frac{\pi a}{2}\frac{15}{16}R^4=\frac{15}{32}\pi aR^4=\frac{15}{32}\pi\times3.0\times10^{11}\,\mathrm{A/\,m^4}\times\left(2.0\times10^{-3}\,\mathrm{m}\right)^4$

$=2.25\pi\,\mathrm{A}=7.0686\,\mathrm{A}\approx7.1\,\mathrm{A}.$

7. [3] Encontre as correntes no circuito que se segue, sabendo que $\varepsilon_1=3,0\,\mathrm{V};\varepsilon_2=6,0\,\mathrm{V};R_3=4,0\,\Omega;R_1=R_2=R_4=R_5=2,0\,\Omega$.



Solução:

Vou considerar: $\xrightarrow{i_1}\overset{i_3}{\downarrow}\xrightarrow{i_4}$

$$\begin{cases}\varepsilon_1-\varepsilon_2=R_1i_1+R_3i_3+R_2i_1\\0=R_4i_4+R_5i_4+R_3\left(-i_3\right)\\i_1=i_3+i_4\end{cases}$$

Vou somar a primeira com a segunda: $\varepsilon_1-\varepsilon_2=\left(R_1+R_2\right)i_1+\left(R_4+R_5\right)i_4$

$$\begin{cases}\varepsilon_1-\varepsilon_2=\left(R_1+R_2\right)i_1+\left(R_4+R_5\right)i_4\\i_3=\frac{\left(R_4+R_5\right)}{R_3}i_4\\i_1=i_3+i_4\end{cases}$$

$\varepsilon_1-\varepsilon_2=\left(R_1+R_2\right)\left(i_3+i_4\right)+\left(R_4+R_5\right)i_4=\left(R_1+R_2\right)i_3+\left(R_1+R_2+R_4+R_5\right)i_4$

$\varepsilon_1-\varepsilon_2=\left(R_1+R_2\right)\frac{\left(R_4+R_5\right)}{R_3}i_4+\left(R_1+R_2+R_4+R_5\right)i_4$

$\varepsilon_1-\varepsilon_2=\left(R+R\right)\frac{\left(R+R\right)}{2R}i_4+\left(R+R+R+R\right)i_4=2Ri_4+4Ri_4=6Ri_4$

$3.0\,\mathrm{V}-6.0\,\mathrm{V}=6\times2.0\,\Omega\times i_4\longrightarrow i_4=\frac{-3.0\,\mathrm{V}}{12\,\Omega}=-0.25\,\mathrm{A}$

$i_3=\frac{\left(R_4+R_5\right)}{R_3}i_4=\frac{2R}{2R}i_4=i_4=-0.25\,\mathrm{A}$

$i_1=i_3+i_4=-0.5\,\mathrm{A}$

O sentido de todas as nossas correntes é ao contrário do que inicialmente considerámos.

8. [2.5] Um electrão move-se numa região com um campo eléctrico e um campo magnético uniformes e num certo instante tem uma velocidade de $1.20 \times 10^4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ dirigida no sentido positivo do eixo x e uma aceleração de $2.00 \times 10^{12}\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ dirigida no sentido positivo do eixo z. O campo eléctrico tem uma magnitude de $20.0\,\mathrm{N\,C^{-1}}$ e é dirigido no sentido positivo do eixo z. Que componentes do campo magnético nessa região podemos determinar? A massa do electrão é $9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$.

Resp: $\sum \mathbf{F} = q_e\mathbf{E} + q_e\mathbf{v} \times \mathbf{B} = m_e\mathbf{a}$

$B_x =$ qualquer, $B_y = -2.62\,\mathrm{mT}$, $B_z = 0\,\mathrm{T}$.

$\boxed{\text{Solução:}}$

$\sum \mathbf{F} = q_e\mathbf{E} + q_e\mathbf{v} \times \mathbf{B} = q_e\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$

$= -1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}\left[\left(0; 0; 20.0\,\mathrm{N\,C^{-1}}\right) + \left(1.20 \times 10^4\,\mathrm{m\,s^{-1}}; 0; 0\right) \times \left(B_x; B_y; B_z\right)\right]$

$q_e\mathbf{E} = -\left(0; 0; 20.0 \times 1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{N}\right) = \left(0; 0; -3.2 \times 10^{-18}\,\mathrm{N}\right)$

$q_e\left(\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) = -1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C} \times \left(1.20 \times 10^4\,\mathrm{m\,s^{-1}}; 0; 0\right) \times \left(B_x; B_y; B_z\right) = \left(-1.92 \times 10^{-15}; 0; 0\right) \times \left(B_x; B_y; B_z\right) =$

$\sum \mathbf{F} = m_e\mathbf{a} = \left(9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}\right)\left(0; 0; 2.00 \times 10^{12}\,\mathrm{m\,s^{-2}}\right) = \left(0; 0; 1.82 \times 10^{-18}\,\mathrm{N}\right)$

Temos então $\left(0; 0; 1.82 \times 10^{-18}\,\mathrm{N}\right) = \left(0; 0; -3.2 \times 10^{-18}\,\mathrm{N}\right) + \left(-1.92 \times 10^{-15}; 0; 0\right) \times \left(B_x; B_y; B_z\right)$

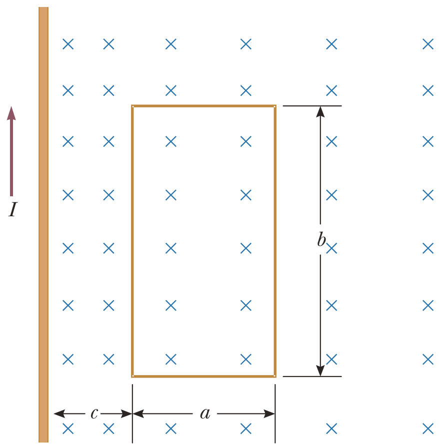
Ou seja temos: $F\mathbf{u}_z = -3.2 \times 10^{-18}\mathbf{u}_z - 1.92 \times 10^{-15}\mathbf{u}_x \times \left(B_x; B_y; B_z\right)$, podemos então ver que B pode ter qualquer componente segundo x, segundo z não pode ter qualquer componente. Segundo y tem uma componente bem determinada, que vamos agora determinar:

Temos então: $-1.92 \times 10^{-15}\mathbf{u}_x \times \left(B_x; B_y; B_z\right) = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ -1.92 \times 10^{-15} & 0 & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = 1.92 \times 10^{-15}B_z\mathbf{u}_y - 1.92 \times 10^{-15}B_y\mathbf{u}_z$

$1.82 \times 10^{-18}\mathbf{u}_z = -3.2 \times 10^{-18}\mathbf{u}_z - 1.92 \times 10^{-15}B_y\mathbf{u}_z + 1.92 \times 10^{-15}B_z\mathbf{u}_y$

Ou seja: $\begin{cases} 0 = -1.92 \times 10^{-15}B_z \\ 1.82 \times 10^{-18} = -3.2 \times 10^{-18} - 1.92 \times 10^{-15}B_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_z = 0 \\ B_y = \frac{1.82 \times 10^{-18} + 3.2 \times 10^{-18}}{-1.92 \times 10^{-15}} = -2.61\,\mathrm{mT} \end{cases}$

9. [2] Uma espira rectangular de largura a e comprimento b está localizada perto de um fio longo que transporta uma corrente I (ver figura). A distância entre o fio e o lado mais próximo da espira é c. O fio é paralelo ao lado maior da espira. Encontre o fluxo magnético total através da espira devido à corrente no fio.



$\boxed{\text{Solução:}}$

Lei de Ampère $\quad \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{int}$

$B \oint dl = \mu_0 I$

$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, r: distância do fio ao ponto em questão

$\Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dA = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_c^{c+a} \frac{b dr}{r}$
$\Phi_B = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{c}\right) \text{ Wb}$