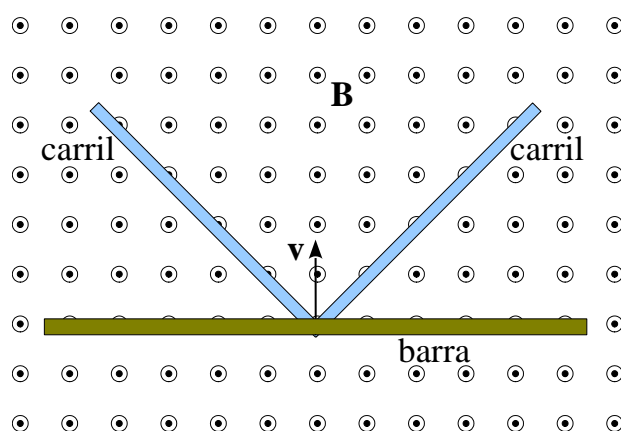


Nome: _____ Número: _____ Curso: **EET**

Cotação:

1	2	3	4	5	6	7	8	T

1. [3] Na figura que se segue estão representados dois carris rectilíneos condutores que formam entre si um ângulo recto. Está também representada uma barra condutora que está no mesmo plano que os dois carris em contacto com o vértice formado pelos carris. No instante $t = 0$ a barra começa a mover-se sem rotação no sentido indicado na figura com uma velocidade v constante, permanecendo em contacto com os carris. Existe nesta região do espaço um campo magnético uniforme de magnitude B dirigido perpendicularmente aos carris no sentido indicado na figura.



- (a) Calcule, em função do tempo, o fluxo do campo magnético através do triângulo formado pelos carris e barra e a magnitude da força eletromotriz induzida no triângulo.
- (b) Calcule os valores do fluxo do campo magnético e da força eletromotriz para o instante $t = 300 \mu\text{s}$ assumindo que $v = 0,520 \text{ km/s}$ e $B = 350 \text{ mT}$.

Solução:

$$\text{a) Fluxo: } \begin{cases} \Phi_B = BA \\ A = \frac{b \times h}{2} \end{cases}$$

A área do triângulo varia com o tempo. A altura pode ser calculada da seguinte forma:

$$v = \frac{h}{t} \longrightarrow h = vt$$

$$\text{A área da base pode ser obtida dividindo o triângulo a meio: } \sin 45^\circ = \frac{b/2}{h} \longrightarrow 1 = \frac{b/2}{h} \longrightarrow b = 2h$$

$$\text{Ficamos com } A = \frac{b \times h}{2} = \frac{2h \times h}{2} = h^2 = (vt)^2$$

$$\text{Fluxo: } \Phi_B = BA = B(vt)^2$$

$$\text{Força electromotriz: } \begin{cases} \varepsilon = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{BdA}{dt} \\ A = (vt)^2 \longrightarrow \frac{dA}{dt} = 2tv \end{cases} \longrightarrow \varepsilon = 2Btv^2$$

$$\text{b) } \Phi_B = 350 \text{ mT} \times (0.520 \text{ km/s} \times 300 \mu\text{s})^2 = 8.5176 \times 10^{-3} \text{ T m}^2 \approx 8.52 \times 10^{-3} \text{ Wb.}$$

$$\varepsilon = 2 \times 350 \text{ mT} \times 300 \mu\text{s} \times (0.520 \text{ km/s})^2 = 56.784 \text{ V} \approx 56.8 \text{ V.}$$

2. [1] Considere um solenóide de 200 espiras no qual uma corrente de 1,75 A produz um fluxo de $3,70 \times 10^{-4}$ Wb em cada espira. Calcule a energia associada ao campo magnético do solenóide.

Sol: $U_B = \frac{1}{2}LI^2$; $\Phi_B = \frac{LI}{N}$

$$U_B = \frac{1}{2} \left(\frac{N\Phi_B}{I} \right) I^2 = \frac{1}{2} N\Phi_B I = \frac{1}{2} (200) (3,70 \times 10^{-4}) (1,75) = 0,0648 \text{ J}$$

3. [3] Um condensador plano possui placas circulares de raio 3 cm. Está posicionado de maneira que as placas sejam paralelas ao plano (xy) e os centros das placas positiva e negativa se encontrem nos pontos com coordenadas $(0,0,1 \text{ mm})$ e $(0,0,-1 \text{ mm})$, respectivamente. A carga inicial do condensador é de 25 mC. No momento $t = 0$ a carga começa a aumentar, a uma taxa constante, e no momento $t = 20 \text{ ms}$ atinge o valor de 75 mC. Determine:

- (a) O vector da densidade de corrente de deslocamento dentro do condensador.
 (b) O módulo do campo magnético no ponto com coordenadas $(2 \text{ cm}, 0, 0)$.
 (c) O vector do campo magnético no mesmo ponto.

(a) $\left(0, 0, -\frac{75 \text{ mC} - 25 \text{ mC}}{20 \text{ ms} \cdot 3,14 (3 \text{ cm})^2}\right) = \left(0, 0, -885 \frac{\text{A}}{\text{m}^2}\right)$ ou $(0, 0, -885) \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$ Se o módulo do vector está correcto mas não a sua direcção e/ou o seu sentido, dá-se 0,25 valor.

(b) $B(2\pi r) = \mu_0 j \pi r^2 \iff B = \frac{1}{2} \mu_0 j r = \frac{1}{2} 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{Tm}}{\text{A}} 885 \frac{\text{A}}{\text{m}^2} 2 \text{ cm} = 1,11 \times 10^{-5} \text{ T}$

(c) $(0, -\text{resposta na alínea (b)}, 0)$

4. [3] Um indutor ($L = 400 \text{ mH}$), um condensador ($C = 4,43 \mu\text{F}$), e uma resistência ($R = 500 \Omega$) estão ligados em série a uma fonte de corrente alternada de 50,0 Hz. A amplitude da corrente no circuito é 250 mA. Calcule:

- (a) a amplitude da tensão.
 (b) o desfasamento entre a corrente e a tensão.

Resp: a) $V_{\text{max}} = 194 \text{ V}$; b) $\phi = 49,9^\circ$ (A corrente está em avanço de fase $49,9^\circ$ em relação à tensão).

Solução:

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} \tilde{I} = \frac{\tilde{V}}{\tilde{Z}} \longrightarrow I_0 = \frac{V_0}{Z} \longrightarrow V_0 = Z I_0 \\ \tilde{Z} = \tilde{Z}_L + \tilde{Z}_C + \tilde{Z}_R = i\omega L + \frac{1}{i\omega C} + R = R + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) i \\ Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{(500)^2 + \left((2\pi \times 50,0)(400 \times 10^{-3}) - \frac{1}{(2\pi \times 50,0)4,43 \times 10^{-6}}\right)^2} \approx 775,6 \Omega \end{array} \right.$$

$$\longrightarrow V_0 = Z I_0 = 775,6 \times 250 \times 10^{-3} = 193,9 \approx 194 \text{ V}$$

$$\text{b) } \phi = -\arctan\left(\frac{\text{Im}(\tilde{Z})}{\text{Re}(\tilde{Z})}\right) = -\arctan\left(\frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R}\right) = -\arctan\left(\frac{(2\pi \times 50,0)(400 \times 10^{-3}) - \frac{1}{(2\pi \times 50,0)4,43 \times 10^{-6}}}{500}\right) = 0,87017 \text{ rad} = 49,9^\circ \text{ (I está em avanço de fase de } 0,870 \text{ rad ou } 49,9^\circ \text{ em relação à tensão).}$$

5. [2] O filamento de uma lâmpada incandescente possui uma resistência de 150Ω e é percorrido por uma corrente contínua de 1,00 A. O filamento tem 8,00 cm de comprimento e 0,900 mm de raio. Negligenciando o campo electromagnético devido à radiação luminosa, calcule:

- (a) o vector de Poynting na superfície do filamento;
 (b) as magnitudes dos campos eléctrico e magnético na superfície do filamento.

Solução:

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} S = \frac{Pot}{A} \\ Pot = RI^2 \longrightarrow S = \frac{RI^2}{2\pi rL} = \frac{150 \Omega \times (1,00 \text{ A})^2}{2\pi \times 0,900 \times 10^{-3} \text{ m} \times 8,00 \times 10^{-2} \text{ m}} = 331573 \text{ W m}^{-2} \approx 332 \text{ kW m}^{-2}. \\ A = 2\pi rL \end{array} \right.$$

Esta é a magnitude do vector. Quanto à direcção e sentido podemos dizer que aponta radialmente para dentro do filamento.

$$b) \begin{cases} B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \text{ T m A}^{-1} \times 1.00 \text{ A}}{2\pi \times 0.900 \times 10^{-3} \text{ m}} = 2.22222 \times 10^{-4} \text{ T} \approx 222 \mu\text{T} \\ E = \frac{V}{\Delta x} = \frac{RI}{L} = \frac{150 \Omega \times 1.00 \text{ A}}{8.00 \times 10^{-2} \text{ m}} = 1875.0 \text{ V m}^{-1} \approx 1.88 \text{ kV m}^{-1} \end{cases}$$

Nota: Tal como seria de esperar $S = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{1.88 \text{ kV m}^{-1} \times 222 \mu\text{T}}{4\pi \times 10^{-7} \text{ T m A}^{-1}} \approx 332 \text{ kW m}^{-2}$.

6. [3] Uma distribuição de corrente origina um potencial vector magnético $\mathbf{A} = Cx^2y\mathbf{a}_x + Dy^2x\mathbf{a}_y + Fxyz\mathbf{a}_z$, com $C = D = 1 \text{ Wb/m}^4$, $F = -4 \text{ Wb/m}^4$. Calcule:

(a) O campo magnético no ponto com coordenadas $(-1, 2, 5) \text{ mm}$.

(b) O fluxo do campo magnético através da superfície definida por $\{z = 1 \text{ cm}; 0 \leq x \leq 1 \text{ cm}; -1 \text{ cm} \leq y \leq 4 \text{ cm}\}$.

Solução:

$$a) \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times (x^2y, y^2x, -4xyz) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & y^2x & -4xyz \end{vmatrix} =$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}(-4xyz) - \frac{\partial}{\partial z}(y^2x), \frac{\partial}{\partial z}(x^2y) - \frac{\partial}{\partial x}(-4xyz), \frac{\partial}{\partial x}(y^2x) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y) \right) = (-4xz, 4yz, y^2 - x^2)$$

No ponto $(-1, 2, 5) \text{ mm}$ ficamos com:

$$\mathbf{B} = \text{Wb/m}^4 (-4 \times (-1 \text{ mm})(5 \text{ mm}), 4 \times (2 \text{ mm}) \times (5 \text{ mm}), (2 \text{ mm})^2 - (-1 \text{ mm})^2) \\ = (20, 40, 3) \frac{\text{Wb}}{\text{m}^4} \text{ mm}^2 = 10^{-5} (20, 40, 3) \text{ T ou Wb m}^{-2}.$$

b) Podemos calcular de duas formas

A primeira variante de solução: $\Phi_{\mathbf{B}} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$

Onde $d\mathbf{S} = dx dy \mathbf{a}_z$

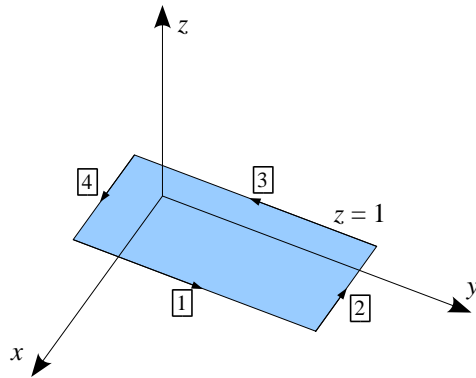
$$\Phi_{\mathbf{B}} = \int_S (-4xz, 4yz, y^2 - x^2) \cdot (0, 0, 1) dx dy \text{ Wb/m}^4 = \int_S (y^2 - x^2) dx dy \text{ Wb/m}^4 \\ = \text{Wb/m}^4 \left(\int_S y^2 dx dy - \int_S x^2 dx dy \right) = \text{Wb/m}^4 \left(\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=-1}^{y=4} y^2 dx dy - \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=-1}^{y=4} x^2 dx dy \right) \\ = \text{Wb/m}^4 \left(\int_{x=0}^{x=1} dx \int_{y=-1}^{y=4} y^2 dy - \int_{x=0}^{x=1} x^2 dx \int_{y=-1}^{y=4} dy \right) = \text{Wb/m}^4 \left(x \Big|_0^1 \times \frac{y^3}{3} \Big|_{-1}^4 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 \times y \Big|_{-1}^4 \right) \\ = \text{Wb/m}^4 \times 1 \text{ cm} \times \frac{1}{3} \times ((4 \text{ cm})^3 - (-1 \text{ cm})^3) - \text{Wb/m}^4 \times \frac{1}{3} \text{ cm} \times (4 \text{ cm} - (-1 \text{ cm})) \\ = \frac{65}{3 \text{ m}^4} \text{ Wb cm}^4 - \frac{5}{3 \text{ m}^4} \text{ Wb cm}^2 = 20 \frac{\text{Wb cm}^4}{\text{m}^4} = 2.0 \times 10^{-7} \text{ Wb ou T m}^2.$$

A segunda variante de solução baseia-se na fórmula $\Phi_{\mathbf{B}} = \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_1 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_1 + \int_2 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_2 + \int_3 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_3 + \int_4 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_4$

Ou seja dividimos a curva fechada Γ em quatro segmentos de recta. Saliente-se que o sentido dos nossos segmentos de recta deve ser coerente com a orientação de $d\mathbf{S}$ (caso contrário o valor do fluxo calculado será simétrico).

$$\Phi_{\mathbf{B}} = \int [Cx^2y\mathbf{a}_x + Dy^2x\mathbf{a}_y + Fxyz\mathbf{a}_z]_{z=1 \text{ cm}}^{x=1 \text{ cm}} \cdot dy\mathbf{a}_y + \int [Cx^2y\mathbf{a}_x + Dy^2x\mathbf{a}_y + Fxyz\mathbf{a}_z]_{z=1 \text{ cm}}^{y=4 \text{ cm}} \cdot dx\mathbf{a}_x \\ + \int [Cx^2y\mathbf{a}_x + Dy^2x\mathbf{a}_y + Fxyz\mathbf{a}_z]_{x=0 \text{ cm}}^{x=1 \text{ cm}} \cdot dy\mathbf{a}_y + \int [Cx^2y\mathbf{a}_x + Dy^2x\mathbf{a}_y + Fxyz\mathbf{a}_z]_{y=-1 \text{ cm}}^{y=4 \text{ cm}} \cdot dx\mathbf{a}_x \\ = \text{Wb/m}^4 \left(\int_{y=-1}^{y=4} y^2 x \Big|_{x=1 \text{ cm}} dy + \int_{x=1}^{x=0} x^2 y \Big|_{y=4 \text{ cm}} dx + \int_{y=4}^{y=-1} y^2 x \Big|_{x=0 \text{ cm}} dy + \int_{x=0}^{x=1} x^2 y \Big|_{y=-1 \text{ cm}} dx \right) \\ = \text{Wb/m}^4 \left(1 \text{ cm} \times \frac{y^3}{3} \Big|_{y=-1}^{y=4} + 4 \text{ cm} \times \frac{x^3}{3} \Big|_{x=1}^{x=0} + 0 \times \frac{y^3}{3} \Big|_{y=4}^{y=-1} + (-1 \text{ cm}) \frac{x^3}{3} \Big|_{x=0}^{x=1} \right) \\ = \frac{1}{3} \text{ Wb/m}^4 (1 \text{ cm} ((4 \text{ cm})^3 - (-1 \text{ cm})^3) + 4 \text{ cm} (0 - (1 \text{ cm})^3) - 1 \text{ cm} ((1 \text{ cm})^3 - (0 \text{ cm})^3))$$

$$= 20 \frac{\text{Wb cm}^4}{\text{m}^4} = 2.0 \times 10^{-7} \text{ Wb ou T m}^2.$$



7. [2] O campo eléctrico no espaço livre é dado por

$$\mathbf{E} = 10^3 \sin(\omega t - kz) \mathbf{a}_y \text{ V/m}$$

Obtenha $\mathbf{H}(z, t)$.

Solução:

$$\begin{cases} E_0 = cB_0 \\ B_0 = \mu_0 H_0 \longrightarrow E_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \mu_0 H_0 \longrightarrow H_0 = \frac{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{\mu_0} E_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0 \\ c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \end{cases}$$

$$H_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0 = \sqrt{\frac{8.85 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}}{4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}}} \times 10^3 \text{ V/m} = 2.65379 \text{ A/m} \approx 2.65 \text{ A/m}$$

Sabe-se que \mathbf{S} aponta no sentido de propagação da onda e também que $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$

A onda propaga-se segundo $+z$

(Nota: $\omega t - kz$: sinais diferentes \rightarrow propaga-se no sentido positivo)

Outra maneira: $\sin a = \cos(a - \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \sin(\omega t - kz) = \cos(\omega t - kz - \frac{\pi}{2}) = \cos(kz - \omega t + \frac{\pi}{2})$, que se propaga segundo z)

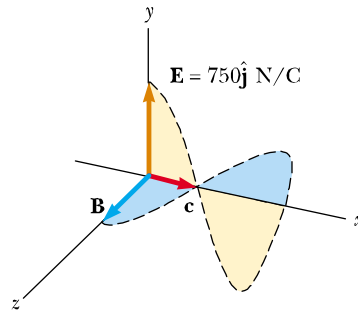
$$\text{Logo: } \mathbf{S} = (0; 0; S_z) = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 0 & E_y & 0 \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = (E_y H_z; 0; -H_x E_y)$$

Conclui-se que $S_z = -H_x E_y$, portanto \mathbf{H} é dirigido segundo $-x$. Ficamos então com:

$$\mathbf{H} = -2.65 \sin(\omega t - kz) \mathbf{a}_x \text{ A/m}$$

8. [3] Uma onda electromagnética sinusoidal de frequência 40,0 MHz propaga-se no espaço livre no sentido positivo do eixo x .

- Determine o comprimento de onda e o período da onda.
- Para o instante $t = 0$, o campo eléctrico num ponto com as coordenadas, em metros, $(1; 2; 3)$ atinge o seu valor máximo, 750 N C^{-1} , e é dirigido segundo o sentido positivo do eixo y . Calcule o campo magnético neste ponto no mesmo instante $t = 0$.
- As variações espaço-tempo dos campos eléctrico e magnético da onda são representadas na forma $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi_E)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi_B)$. Determine $\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{k}, \omega, \varphi_E, \varphi_B$.



$$a) c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \longrightarrow \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}}{40.0 \times 10^6 \text{ Hz}} = 7.50 \text{ m}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{40.0 \times 10^6 \text{ Hz}} = 2.5 \times 10^{-8} \text{ s}$$

$$b) E_0 = cB_0 \longrightarrow B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{750 \text{ N C}^{-1}}{3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}} = 2.50 \times 10^{-6} \text{ T}$$

Para determinar a direcção de \mathbf{B} podemos utilizar $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, \mathbf{S} é dirigido segundo $+x$ (direcção de propagação da onda), \mathbf{E} é dirigido segundo $+y$, implica então pela regra dos três dedos que \mathbf{B} é dirigido segundo $+z$.

Nota do livro: Because E and B must be perpendicular to each other and perpendicular to the direction of wave propagation (x in this case), we conclude that B is in the z direction.

$$\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z \quad \text{ou} \quad B = (0; 0; B_0)$$

$$c) \omega = 2\pi f = 2\pi \text{ rad} \times 40.0 \times 10^6 \text{ Hz} = 2.51327 \times 10^8 \text{ rad s}^{-1} \approx 2.51 \times 10^8 \text{ rad s}^{-1}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi \text{ rad}}{7.50 \text{ m}} = 0.837758 \frac{\text{rad}}{\text{m}} \approx 0.838 \text{ rad m}^{-1}$$

$$\mathbf{k} \uparrow \uparrow \mathbf{e}_x \implies \mathbf{k} = +\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{e}_x = (0.838; 0; 0) \text{ rad m}^{-1} = 0.838 \mathbf{e}_x \text{ rad m}^{-1}$$

$$\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_y = (0; E_0; 0) = (0; 750; 0) \text{ N C}^{-1}$$

$$\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z = (0; 0; B_0) = (0; 0; 2.50 \times 10^{-6}) \text{ T}$$

$$\varphi_E : \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi_E) = \mathbf{E}_0 \sin(kx - \omega t + \varphi_E) = (0; 750; 0) \sin(kx - \omega t + \varphi_E)$$

No ponto $(1; 2; 3) \text{ m}$ e para o instante $t = 0$ o campo é máximo $\longrightarrow \sin(kx - \omega t + \varphi_E) = 1 \longrightarrow kx - \omega t + \varphi_E = \frac{\pi}{2}$

$$0.838 \text{ rad m}^{-1} \times 1 \text{ m} + \varphi_E = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \varphi_E = \frac{\pi}{2} - 0.838 \text{ rad} = 0.7328 \text{ rad} \approx 0.73 \text{ rad}$$

$\varphi_B = \varphi_E$ (Para um meio não-condutor, as oscilações de \mathbf{E} e de \mathbf{B} estão em fase.)