Cadeira: ELETROMAGNETISMO **Época: Normal**

Ano lectivo: 2023/2024 (1º Semestre) **TESTE 2** (2023/12/15) **Duração:** 2 horas

Nome: ____________________________________Número:_____________ Curso: **EET**

Cotação:

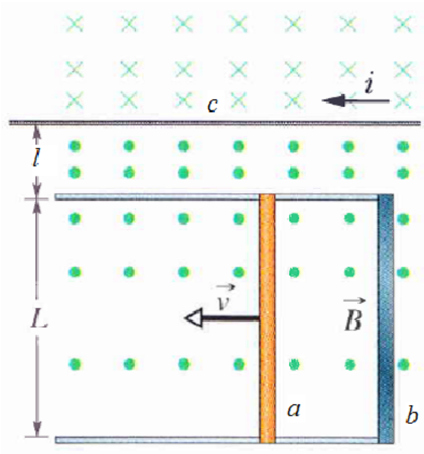
1	2	3	4	5	6	7	8	9	T

1. [3] A figura mostra um bastão a de comprimento $L = 10.0\,\mathrm{cm}$ que se move com uma velocidade constante $v = 5.00\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ao longo de dois carris horizontais. O bastão, os carris e a tira condutora b formam um loop condutor. O bastão possui uma resistência de $0.400\,\Omega$, o resto do loop possui resistência negligenciável. O fio longo c é percorrido por uma corrente i de $100\,\mathrm{A}$. Este fio encontra-se a uma distância $l = 10.0\,\mathrm{mm}$ do loop. Determine:

   (a) A magnitude da fem induzida no loop.

   (b) A magnitude e o sentido da corrente induzida no loop.

   Sugestão: lembre-se que o campo magnético induzido pelo fio não é uniforme no loop.



a) Seja r a distância a partir do fio longo e x a distância a partir da faixa condutora até ao bastão.

$$\begin{cases} |\varepsilon| = \frac{d\Phi_{\mathbf{B}}}{dt} \\ \Phi_{\mathbf{B}} = \int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} \\ B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \\ dS = \underbrace{x}_{\text{comprimento}}\; dr \end{cases} \longrightarrow \Phi_{\mathbf{B}} = \int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = \int_a^{a+L} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} x\,dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} x \int_a^{a+L} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} x \ln\frac{a+L}{a}$$

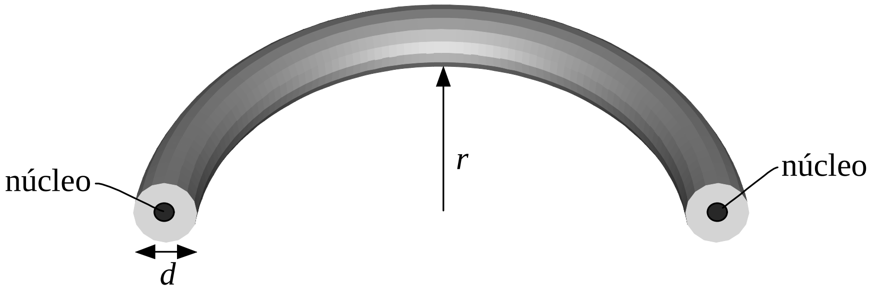
$$|\varepsilon| = \frac{d\Phi_{\mathbf{B}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} x \ln\frac{a+L}{a}\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{dx}{dt}\ln\frac{a+L}{a} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} v \ln\frac{a+L}{a}$$

$$= \frac{\left(4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{T\,m\,A^{-1}}\right)\times(100\,\mathrm{A})}{2\pi} \times 5.00\,\mathrm{m\,s^{-1}} \ln\frac{10.0\,\mathrm{mm}+100\,\mathrm{mm}}{10.0\,\mathrm{mm}} = 2.39790\times10^{-4}\,\mathrm{V} = 2.40\times10^{-4}\,\mathrm{V}.$$

b) $i = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{2.40\times10^{-4}\,\mathrm{V}}{0.400\,\Omega} = 6.00\times10^{-4}\,\mathrm{A}.$

O fluxo de $\mathbf{B}$ é dirigido para fora da página e aumenta com o tempo, de acordo com a lei de Lenz o campo da corrente induzida tem de opôr-se a este aumento e assim é dirigido para dentro da página. Assim a corrente na espira (pela regra da mão direita) é no sentido dos ponteiros do relógio (ou seja é no sentido horário) bem como a força electromotriz induzida.

2. [1.5] Considere o toróide da figura (apenas metade está representada, mas considere o toróide completo), onde $r \gg d$. O toróide tem um núcleo de ferro, no qual pretende-se obter um campo magnético de $1,30\,\mathrm{T}$. O toróide possui 470 espiras, $r = 10,0\,\mathrm{cm}$, a permeabilidade magnética relativa do ferro é 5000. Qual é a corrente necessária?



$\boxed{\text{Solução:}}$
Resp: $I = \frac{B}{\mu n} = \frac{B}{\mu}\frac{l}{N} = \frac{B}{\mu}\frac{2\pi r}{N} = 277\,\mathrm{mA}$

3. [1.5] Um toróide tem um raio médio de $14\,\mathrm{cm}$ e uma área de seção transversal de $3\,\mathrm{cm}^2$. É enrolado com um fio fino, com 60 voltas/ cm medido ao longo de sua circunferência média, e o fio transporta uma corrente de $4\,\mathrm{A}$. O núcleo é preenchido com um material paramagnético de susceptibilidade magnética $2,9 \times 10^{-4}$. Determine:

   (a) a magnitude do campo magnético dentro da substância;
   (b) o módulo da magnetização;
   (c) o módulo do campo magnético se não houvesse nenhum núcleo paramagnético presente.

$\boxed{\text{Solução:}}$ (ver sols ism cap 27 da 5th edition, parecido com a sol do 78....)

a) $\begin{cases} B = \mu_r B_0 \\ \mu_r = 1 + \chi_m \end{cases} \Longrightarrow B = \mu_r B_0 = (1+\chi_m)\,B_0 = (1+\chi_m)\,\mu_0 n I$

$= (1 + 2.9 \times 10^{-4}) \times 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{T\,m\,A^{-1}} \times \frac{60}{0.01\,\mathrm{m}} \times 4\,\mathrm{A} = 9.602\,8 \times 10^{-3}\pi\,\mathrm{T} = 3.016\,8 \times 10^{-2}\,\mathrm{T}$

b) $\begin{cases} B = \mu n I \\ M = \chi_m H \\ B = \mu H \\ n = \frac{N}{2\pi R} \end{cases} \Longrightarrow M = \chi_m H = \chi_m \frac{B}{\mu} = \chi_m \frac{\mu n I}{\mu} = \chi_m n I = 2.9 \times 10^{-4} \times \frac{60}{0.01\,\mathrm{m}} \times 4\,\mathrm{A} = 6.96\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$

ou $B = \mu_0 (H + M) = \underbrace{\mu_0 H}_{B_0} + \mu_0 M \Longrightarrow M = \frac{B - B_0}{\mu_0} =$

c) $B = \mu_0 n I = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{T\,m\,A^{-1}} \times \frac{60}{0.01\,\mathrm{m}} \times 4\,\mathrm{A} = 0.009\,6\pi\,\mathrm{T} = 3.016\,8 \times 10^{-2}\,\mathrm{T}$

Que dá o mesmo que em a) pois χ_m é muito pequeno.

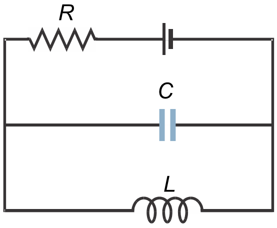
4. [1.5] A carga nas placas de um condensador plano ideal varia com o tempo de acordo com a fórmula $q = \frac{q_0}{1+at}$, onde q_0 e a são constantes dadas. A área das placas é A.

   (a) Escreva a fórmula para a densidade de corrente de deslocamento dentro do condensador.
   Resposta:

   (b) Calcule o valor numérico da densidade de corrente de deslocamento no instante $t = 1\,\mu\mathrm{s}$ para as seguintes condições: $q_0 = 2\,\mu\mathrm{C}$, $a = 2 \times 10^5\,\mathrm{s}^{-1}$, $A = 1\,\mathrm{cm}^2$.
   Resposta ___

Avali: 0.75+0.75 Res.: (a) $j = \frac{1}{A}\frac{dq}{dt} = -\frac{q_0 a}{A(1+at)^2}$ (b) $j = \frac{2\times10^{-6}\,\mathrm{C}2\times10^{5}\,\mathrm{s}^{-1}}{1\,\mathrm{cm}^2(1+2\times10^{5}\,\mathrm{s}^{-1}1\,\mu\mathrm{s})^2\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}} = 2.778\times10^{3}\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$

5. [4] Considere o circuito apresentado na figura em que uma resistência (R), um condensador (C) e um indutor (L) estão ligados a uma fonte de tensão (ideal) alternada que opera com uma amplitude de tensão V_0 e frequência angular ω.



Determine:

(a) A impedância do circuito.
(b) A amplitude da corrente que atravessa a resistência.
(c) A amplitude da tensão aos terminais do condensador.
(d) A potência média consumida pelo circuito.

Solução:

a)

$$\begin{aligned}
\widetilde{Z} &= \widetilde{Z}_R + \left(\frac{1}{\widetilde{Z}_L} + \frac{1}{\widetilde{Z}_C}\right)^{-1} = \\
R + \frac{i\omega L \times \frac{1}{i\omega C}}{i\omega L + \frac{1}{i\omega C}} &= R + \frac{\frac{L}{C}}{i\omega L + \frac{1}{i\omega C}} = R + i\frac{\frac{L}{C}}{-\omega L + \frac{1}{\omega C}} \\
&\text{ou } R + i\frac{\omega L}{1-\omega^2 LC}
\end{aligned}$$

b)

$$I_0 = \left|\widetilde{I}\right| = \frac{V_0}{\left|R + i\frac{\omega L}{1-\omega^2 LC}\right|} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{1-\omega^2 LC}\right)^2}} = \frac{V_0\left|1-\omega^2 LC\right|}{\sqrt{R^2\left(1-\omega^2 LC\right)^2 + (\omega L)^2}}$$

c) A tensão sobre o condensador (ou a indutância):

$$\widetilde{V}_C = \widetilde{V} - \widetilde{I}\widetilde{Z}_R = V_0 - \widetilde{I}R = V_0 - \frac{V_0 R}{R + i\frac{\omega L}{1-\omega^2 LC}} = V_0\left(1 - \frac{R}{R + i\frac{\omega L}{1-\omega^2 LC}}\right) =$$

$$= V_0\frac{i\frac{\omega L}{1-\omega^2 LC}}{R + i\frac{\omega L}{1-\omega^2 LC}} = V_0\frac{i\omega L}{R\left(1-\omega^2 LC\right) + i\omega L} = \frac{V_0}{-iR\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) + 1}$$

A amplitude da tensão:

$$V_{C0} = \left|\widetilde{V}_C\right| = \frac{V_0}{\sqrt{R^2\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2 + 1}}$$

d) A potência média consumida pelo circuito é a potência consumida pela resistência (a potência média consumida pelo condensador e pelo indutor é 0). Uma vez que

$$\begin{aligned}
P_{méd} &= \frac{V_{rms}^2}{R} = I_{rms}V_{rms} = I_{rms}^2 R \\
V_{rms} &= \frac{V_0}{\sqrt{2}}, \quad I_{rms} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

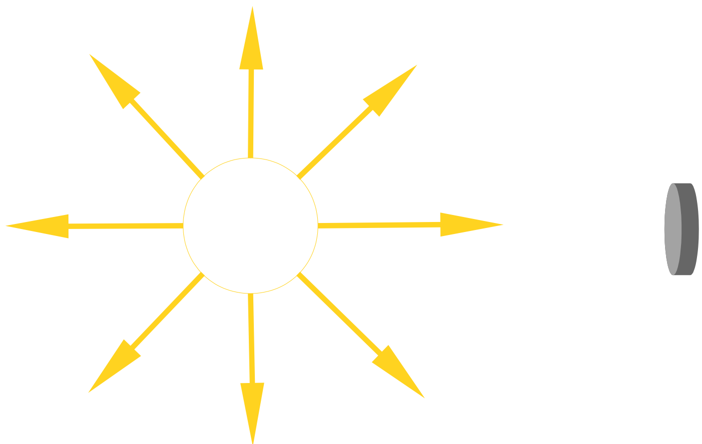
ficamos com

$$\begin{aligned} P_{médR} &= RI_{rms}^2 = R\left(\frac{I_0}{\sqrt{2}}\right)^2 = R\frac{I_0^2}{2} \\ \text{com } I_0 &= \frac{V_0\left|1-\omega^2 LC\right|}{\sqrt{R^2\left(1-\omega^2 LC\right)^2+(\omega L)^2}} \end{aligned}$$

Finalmente:

$$P_{médR} = R\frac{I_0^2}{2} = \frac{R}{2}\frac{\left(V_0\left|1-\omega^2 LC\right|\right)^2}{R^2\left(1-\omega^2 LC\right)^2+(\omega L)^2}$$

6. [3.5] A intensidade de radiação electromagnética solar que incide na atmosfera superior da Terra é aproximadamente $1,4\,\mathrm{kW/\,m^2}$. (Mais precisamente: a potência de cerca de $1,4\,\mathrm{kW}$ em forma de radiação electromagnética solar incide numa área de um metro quadrado cuja normal é dirigida ao Sol; ver a figura.)



Considere a seguinte informação de referência: A distância média da Terra ao Sol é $1,496\times 10^{11}$ m e a distância média de Marte ao Sol é $2,28\times 10^{11}$ m. Considere Marte como uma esfera de raio $3,37\times 10^{6}$ m. Determine a:

(a) intensidade de radiação electromagnética solar incidente em Marte;

(b) potência total da radiação electromagnética solar incidente em Marte;

(c) força que actua em Marte por parte da radiação, partindo do princípio de que toda a radiação incidente é absorvida.

Solução:

Seja I_{TS}: intensidade de radiação na Terra devido ao Sol; I_{MS}: intensidade de radiação em Marte devido ao Sol; P_S: potência de radiação do Sol; A_{TS}: área da superfície esférica cujo raio corresponde à distância média entre a Terra e o Sol; A_{MS}: área da superfície esférica cujo raio corresponde à distância média entre Marte e o Sol.

a) $\begin{cases} I_{TS} \equiv S_{TS} = \frac{P_S}{A_{TS}} = \frac{P_S}{4\pi r_{TS}^2} \\ I_{MS} \equiv S_{MS} = \frac{P_S}{A_{MS}} = \frac{P_S}{4\pi r_{MS}^2} \end{cases} \longrightarrow I_{TS}\times 4\pi r_{TS}^2 = I_{MS}\times 4\pi r_{MS}^2$

$\longrightarrow I_{MS} = I_{TS}\times\left(\frac{r_{TS}}{r_{MS}}\right)^2 = 1400\,\mathrm{W/\,m^2}\times\left(\frac{1.496\times 10^{11}\,\mathrm{m}}{2.28\times 10^{11}\,\mathrm{m}}\right)^2 = 602.728 \approx 603\,\mathrm{W/\,m^2}.$

b) Seja P_{MS}: potência de radiação incidente em Marte devido ao Sol; A_{eficaz}: área eficaz de Marte que bloqueia uma parte da radiação emitida pelo Sol.

Nota: $A_{\text{eficaz}} = \pi r_M^2$

$P_{MS} = I_{MS} \times A_{\text{eficaz}} = I_{MS} \times \pi r_M^2 = (603\,\mathrm{W/\,m^2}) \times \pi\,(3.37 \times 10^6\,\mathrm{m})^2 = 2.151\,43 \times 10^{16}\,\mathrm{W} \approx 2.15 \times 10^{16}\,\mathrm{W}$.

c) $p = \frac{F}{A}$

$p = Z\frac{S_{MS}}{c} \equiv Z\frac{I_{MS}}{c} \qquad (Z = 1 \quad \text{se completamente absorvida})$

$\longrightarrow F = pA = \frac{I_{MS}}{c} A_{\text{eficaz}} = \frac{P_{MS}}{A_{\text{eficaz}}} \times \frac{1}{c} \times A_{\text{eficaz}} = \frac{P_{MS}}{c} = \frac{2.15\times10^{16}\,\mathrm{W}}{3\times10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}} = 7.16667\times10^7\,\mathrm{N} \approx 7.17\times10^7\,\mathrm{N}$.

7. [1] Uma onda electromagnética plana propaga-se no vácuo no sentido negativo do eixo y. Em determinada posição e instante, o campo magnético encontra-se dirigido segundo o sentido positivo do eixo z e tem uma magnitude de $28\,\mathrm{nT}$.

   (a) Qual é a magnitude do campo eléctrico nessa mesma posição e instante?

   (b) Qual é o vector do campo eléctrico nessa mesma posição e instante?

   Res (a) $E = cB = 3 \times 10^8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} 28\,\mathrm{nT} = 8.4 \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

   (b) os vectores $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{k}$ constituem uma tríade direita $\Longrightarrow$ $\mathbf{E} \upuparrows \mathbf{e}_x \Longrightarrow \mathbf{E} = (8.4, 0, 0)\ \mathrm{V\,m^{-1}}$

8. [1] Escreva uma fórmula para uma grandeza escalar $\xi = \xi\,(\mathbf{r}, t)$ que descreva uma onda plana harmónica de amplitude ξ_0, de comprimento de onda λ e de frequência angular ω que se propaga no sentido negativo do eixo y. Sabe-se que no instante $t = 0$ a grandeza ξ no plano $y = \lambda/2$ é igual a ξ_0.

   Resol.: $\xi = \xi_0 \sin\left(-\frac{2\pi}{\lambda}y - \omega t + \frac{3\pi}{2}\right) = -\xi_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}y + \omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -\xi_0 \cos\left(-\frac{2\pi}{\lambda}y - \omega t\right) = -\xi_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}y + \omega t\right.$
   Aceita-se qualquer uma das respostas.

9. [3] Considere uma onda plana electromagnética sinusoidal que se propaga no vazio segundo o sentido positivo do eixo x. O comprimento de onda é $50.0\,\mathrm{m}$. O campo eléctrico oscila segundo o eixo y com uma amplitude de $22.0\,\mathrm{V\,m^{-1}}$.

   (a) Calcule a frequência da onda.

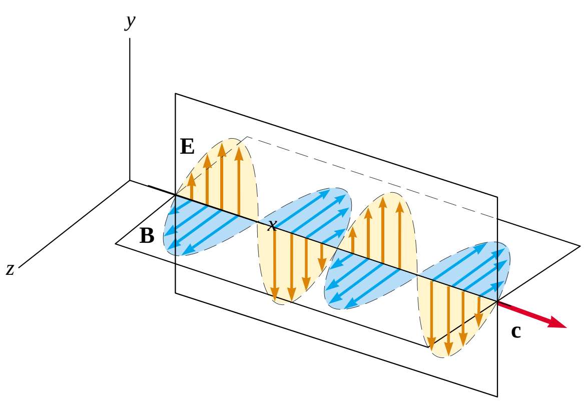
   (b) Calcule o vector campo magnético no instante em que o campo eléctrico é dirigido segundo o sentido negativo do eixo y e o seu módulo possui o valor máximo.

   (c) Uma expressão genérica para o campo magnético de uma onda plana electromagnética sinusoidal pode ser escrita na forma $\mathbf{B}\,(\mathbf{r}, t) = B_0 \sin\,(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\,\mathbf{e}_n$, onde $\mathbf{e}_n$ é um vector unitário (assume-se que no instante $t = 0$ o campo na origem é zero). Quais são os valores dos parâmetros B_0, $\mathbf{k}$, ω e $\mathbf{e}_n$ nas condições especificadas acima?

   a) $c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \longrightarrow f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3.00\times10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{50.0\,\mathrm{m}} = 6.0 \times 10^6\,\mathrm{Hz}$

   b) $E = cB$ sempre, e em particular: $E_0 = cB_0 \longrightarrow B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{22.0\,\mathrm{V\,m^{-1}}}{3.00\times10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}} = 7.33333 \times 10^{-8}\,\mathrm{T} \approx 7.33 \times 10^{-8}\,\mathrm{T}$

   Quanto à direcção vê-se pela regra dos três dedos que é segundo $-\mathbf{e}_z$



c) $\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = B_0 \sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\,\mathbf{e}_n$

$\mathbf{k} = k\mathbf{e}_x, \qquad \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = kx$

$\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_z$

$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = B_0 \sin(kx - \omega t)\,\mathbf{e}_z$

$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\,\mathrm{rad}}{50.0\,\mathrm{m}} = 0.125\,664\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}} \approx 0.13\,\mathrm{rad\,m^{-1}}$

$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 6.0 \times 10^6\,\mathrm{Hz} = 3.76991 \times 10^7\,\mathrm{rad\,s^{-1}} \approx 3.77 \times 10^7\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$

$\mathbf{B} = 7.33 \times 10^{-8}\,(\mathrm{T}) \sin(0.13\,\mathrm{rad\,m^{-1}}x - 3.77 \times 10^7\,\mathrm{rad\,s^{-1}} \times t)\,\mathbf{e}_z$