1	2	3	4	5	T

Cadeira: ELECTROMAGNETISMO **Época: Normal**

Ano lectivo: 2015/2016 (1º Semestre) **TESTE 3** (2016/01/15) **Duração:** 1,5 horas

Nome: _______________________________ Número:___________ Curso: **LEET**

A(s) questão(ões) 1 e 2 deve(m) ser respondida(s) neste enunciado. Nestas questões não se deve apresentar (e não serão cotadas) deduções ou cálculos; não vale a pena apresentar várias variantes da resposta (se, porventura, forem contraditórias, a resposta será considerada incorrecta). A(s) restante(s) questão(ões) deve(m) ser respondida(s) nas folhas de prova com as deduções e os cálculos relevantes. Constantes universais que podem ser necessárias para avaliações numéricas: $\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{T\,m\,A^{-1}}$, $e = 1,602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$, massa de um electrão $m_e = 9,109 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$.

1. [2] As distribuições dos potencias vectorial e escalar numa região de espaço em variáveis adimensionais são, respectivamente, $(8x^2t, 4xt^2, 3z)$ e $\frac{1}{2}\exp\left(-x^2 - y^2 - z^2\right)$, onde x, y, z são as coordenadas cartesianas e t é o tempo. Qual é a distribuição do campo eléctrico?

   Resposta:

   Res: $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \left(xe^{-x^2-y^2-z^2} - 8x^2, ye^{-x^2-y^2-z^2} - 8xt, ze^{-x^2-y^2-z^2}\right)$

2. [4]

   (a) Escreva a fórmula para o vector de Poynting (não é necessário apresentar uma dedução; as designações têm que ser identificadas)

   (b) Escreva a fórmula para o valor médio do vector de Poynting numa onda plana harmónica que se propaga segundo o eixo z num meio não condutor (não é necessário apresentar uma dedução; as designações têm que ser identificadas)

   (c) Uma onda electromagnética plana propaga-se no vácuo no sentido positivo do eixo z. A amplitude de oscilações do campo magnético na onda é de $300\,\mathrm{nT}$. Qual é a amplitude de oscilações do campo eléctrico?

   Resposta___

   (d) Calcule o módulo do valor médio do vector de Poynting nas condições da alínea anterior.

   Resposta___

   Avali: 1 valor por alínea

   Res a) $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, $\mathbf{S}$: a densidade do fluxo da energia electromagnética, $\mathbf{E}$: (a intensidade d)o campo eléctrico, $\mathbf{H}$: a intensidade do campo magnético. Pode-se excluir $\mathbf{H}$ por meio da fórmula $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$, $\mathbf{B}$: indução magnética (ou campo magnético), μ: permeabilidade do meio.

   (b) $\bar{\mathbf{S}} = \frac{E_0 B_0}{2\mu}\,\mathbf{e}_z$, E_0: a amplitude (das oscilações) do campo eléctrico, B_0: a amplitude (das oscilações) do campo magnético, $\mathbf{e}_z$: o vector unitário no sentido positivo do eixo z.

   (c) $E_0 = cB_0 = 3 \times 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} 300\,\mathrm{nT} = 90\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

(d) $\left|\bar{\mathbf{S}}\right| = \frac{E_0 B_0}{2\mu} = \frac{90\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\,300\,\mathrm{nT}}{2\times 4\pi\times 10^{-7}\,\mathrm{T\,m/\,A}} = 10.742\,958\,658\,7\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$

3. [6] Considere um meio de permitividade ε, de permeabilidade μ e de condutividade eléctrica σ. As cargas eléctricas livres estão ausentes. Deduza uma equação que descreva a distribuição do campo eléctrico $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ neste meio e não inclui o campo magnético. Sugestão: comece a partir do sistema de equações de Maxwell em forma diferencial, aplique o operador de rotacional à lei de Faraday e utilize a seguinte fórmula da análise vectorial: $\nabla \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a}) = \nabla(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{a}) - \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{a}$.

   Res. Lei de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

   Aplicando o rotacional:

$$\underbrace{\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})}_{\nabla(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}) - \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{B}} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\underbrace{\nabla \times \mathbf{B}}_{\mu\mathbf{j} + \varepsilon\mu\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t};\ \text{lei de Ampère}}\right)$$

$$\nabla\left(\underbrace{\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}}_{\rho=0,\ \text{lei de Gauss}}\right) - \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{E} = -\mu\frac{\partial \overbrace{\mathbf{j}}^{\sigma\mathbf{E};\ \text{lei de Ohm}}}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{E} - \mu\sigma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.$$

4. [5] Considere um circuito em que uma resistência de $220\,\Omega$, uma bobina de indutância de $150\,\mathrm{mH}$ e um condensador de capacidade de $24,0\,\mu\mathrm{F}$ estão ligados em série a uma fonte de tensão alternada sinusoidal. A fonte produz uma tensão de amplitude $220\,\mathrm{V}$ e frequência $400\,\mathrm{Hz}$. Determine

   (a) a reactância capacitiva;
   (b) a impedância;
   (c) a amplitude da corrente;
   (d) Um segundo condensador com a mesma capacidade de que o primeiro é ligado em série com os outros componentes. Determine se os valores das grandezas das alíneas anteriores aumentam, diminuem ou permanecem constantes.

$\boxed{\text{Solução:}}$

a) $\chi_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi(400\,\mathrm{Hz})(24.0\,\mu\mathrm{F})} = 16.578640\,\Omega \approx 16.6\,\Omega.$

b) $\left|\widetilde{Z}\right| = \sqrt{R^2 + (\chi_L - \chi_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} =$

$\sqrt{220^2 + \left(2\pi\,(400)\,(150\times 10^{-3}) - \frac{1}{2\pi(400)(24.0\times 10^{-6})}\right)^2} = 422.25248 \approx 422\,\Omega.$

c) $I_0 = \frac{V_0}{\left|\widetilde{Z}\right|} = \frac{220\,\mathrm{V}}{422\,\Omega} = 0.52132701\,\mathrm{A} \approx 0.521\,\mathrm{A}.$

d) $C_{eq} = \frac{C\times C}{C+C} = \frac{C^2}{2C} = \frac{C}{2}$ ou seja C_{eq} decresce

- $\chi_C \propto \frac{1}{C_{eq}} \Longrightarrow \chi_C$ aumenta
- $\left|\widetilde{Z}\right| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} =$
  $\sqrt{220^2 + \left(2\pi\,(400)\,(150\times 10^{-3}) - \frac{1}{2\pi(400)\left(\frac{24.0}{2}\times 10^{-6}\right)}\right)^2} = 408.19322 \approx 408\,\Omega.$ Logo, $\left|\widetilde{Z}\right|$ diminui.

- $I_0 \propto \frac{1}{|\widetilde{Z}|}$ Como $\left|\widetilde{Z}\right|$ diminui, I_0 aumenta.

5. [3] Considere o potencial vector magnético $\mathbf{A} = -\frac{\rho^2}{4}\mathbf{a}_z\,\mathrm{Wb/\,m}$ (em coordenadas cilíndricas). Calcule o fluxo magnético através da superfície $\phi = \frac{\pi}{2}; 1 \leq \rho \leq 2\,\mathrm{m}; 0 \leq z \leq 5\,\mathrm{m}$.

   Solução:

   Usando o teorema de Stokes:

   Podemos escrever $\int_S (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_\Gamma \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_1 \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}_1 + \int_2 \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}_2 + \int_3 \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}_3 + \int_4 \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}_4$

   Ou seja dividimos a curva fechada Γ em quatro segmentos de recta. Saliente-se que o sentido dos nossos segmentos de recta deve ser coerente com a orientação de $\mathrm{d}\mathbf{S}$ (caso contrário o valor do fluxo calculado será simétrico).

   $\Phi_\mathbf{B} = \int_1 \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}_1 + \int_2 \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}_2 + \int_3 \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}_3 + \int_4 \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}_4 =$
   $0 + \int_{z=0}^{z=5} \left(0, 0, -\frac{\rho^2}{4}\right) \cdot (0, 0, \mathrm{d}z) + 0 + \int_{z=5}^{z=0} \left(0, 0, -\frac{\rho^2}{4}\right) \cdot (0, 0, \mathrm{d}z) =$
   $-\int_{z=0}^{z=5} \frac{\rho^2}{4}\mathrm{d}z - \int_{z=5}^{z=0} \frac{\rho^2}{4}\mathrm{d}z = -\frac{\rho_2^2}{4}\int_{z=0}^{z=5}\mathrm{d}z - \frac{\rho_4^2}{4}\int_{z=5}^{z=0}\mathrm{d}z =$
   $-\frac{(1)^2}{4}\int_{z=0}^{z=5}\mathrm{d}z - \frac{(2)^2}{4}\int_{z=5}^{z=0}\mathrm{d}z = \left(\frac{-1}{4}(5-0) - \frac{4}{4}(0-5)\right) = \frac{15}{4} = 3.75\,\mathrm{Wb}$