1	2	3	4	5	T

Cadeira: ELECTROMAGNETISMO **Época: Normal**

Ano lectivo: 2016/2017 (1º Semestre) **TESTE 3** (2016/12/16) **Duração:** 1,5 horas

Nome: ________________________________Número:___________ Curso: **LEET**

A(s) questão(ões) 1 e 2 deve(m) ser respondida(s) neste enunciado. Nestas questões não se deve apresentar (e não serão cotadas) deduções ou cálculos; não vale a pena apresentar várias variantes da resposta (se, porventura, forem contraditórias, a resposta será considerada incorrecta). A(s) restante(s) questão(ões) deve(m) ser respondida(s) nas folhas de prova com as deduções e os cálculos relevantes. Constantes universais que podem ser necessárias para avaliações numéricas: $\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{T\,m\,A^{-1}}$, $e = 1,602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$, massa de um electrão $m_e = 9,109 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$.

1. [3]

   (a) Um segmento de um circuito de corrente alternada é constituído por um indutor de uma indutância de 100 mH e um condensador de capacidade de 47 μF ligados em série. Sabe-se que a impedância deste segmento é nula. Qual é a frequência da tensão aplicada a este segmento?
   Resposta ___

   (b) Um segmento de um circuito de corrente alternada é constituído pelos mesmos indutor e condensador que os das condições da alínea anterior, ligados em paralelo. A frequência da tensão aplicada a este segmento é a mesma que a das condições da alínea anterior. Determine a impedância deste segmento.
   Resposta ___

   Avali: 1.5+1.5.

   Res: a) $\omega = \frac{1}{\sqrt{100\,\mathrm{mH}47\,\mu\mathrm{F}}} = 461.3\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ ou $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{100\,\mathrm{mH}47\,\mu\mathrm{F}}} = 73.41\,\mathrm{Hz}$ Se for sem unidades ou com unidades incorrectas, tira-se 0.3 valor.

   b) ∞ (infinita)

2. [3]

   (a) Exprima a unidade do potencial vector no SI em função da unidade do fluxo magnético.
   Resposta ___

   (b) Escreva uma expressão para o potencial vector do campo magnético estático produzido por uma corrente estacionária. As designações devem ser especificadas.
   Resposta:

   (c) Considere um fio rectilíneo que começa no ponto $(0; 0; 0)$ e termina no ponto $(0; 0; 1\,\mathrm{mm})$. O fio encontra-se num meio com a permeabilidade magnética relativa igual a 3 e é percorrido por uma corrente igual a $2,5\,\mathrm{A}$ dirigida no sentido negativo do eixo z. Qual é o potencial do campo magnético induzido por esta corrente no ponto $(0; 3\,\mathrm{m}; 4\,\mathrm{m})$?
   Resposta ___

Avali: 1+0.6+1.4. Res: a) $\mathrm{Wb\,m^{-1}}$

b) $\mathbf{A} = \frac{\mu I}{4\pi}\int_\Gamma \frac{d\mathbf{l}}{R}$, onde I é a corrente, μ é a permeabilidade do meio, R é a distância do segmento $d\mathbf{l}$ ao ponto do espaço sob a consideração e Γ é o fio. Se a alínea c) for resolvida correctamente, a alínea b) se considera correcta sem verificação.

c) $\mathbf{A} = \frac{\mu I}{4\pi}\frac{d\mathbf{l}}{R} = \frac{3\times 4\pi\times 10^{-7}\,\mathrm{T\,m\,A^{-1}}2.5\,\mathrm{A}}{4\pi}\frac{1\,\mathrm{mm}(-\mathbf{e}_z)}{\sqrt{9\,\mathrm{m}^2+16\,\mathrm{m}^2}} = -1.5\times 10^{-10}\,\mathrm{T\,m}\mathbf{e}_z$ ou $(0;0;-1.5\times 10^{-10}\,\mathrm{T\,m})$. A unidade pode ser $\mathrm{Wb\,m^{-1}}$. A resposta sem sinal menos dá 0.4.

Comentário Os alunos podem utilizar a fórmula mais genérica: $\mathbf{A} = -\frac{\mu I}{4\pi}\mathbf{e}_z \ln\frac{z'-L+\sqrt{\rho^2+(z'-L)^2}}{L+z'+\sqrt{\rho^2+(L+z')^2}}$, onde $z' = z - 0.5\,\mathrm{mm}$, mas o resultado será o mesmo:

$$\mathbf{A} = -\frac{3\times 4\pi\times 10^{-7}\,\mathrm{T\,m\,A^{-1}}(-2.5\,\mathrm{A})}{4\pi}\mathbf{e}_z \ln\frac{0.5\,\mathrm{mm}-0.5\,\mathrm{mm}+\sqrt{25\,\mathrm{m}^2+(0.5\,\mathrm{mm}-0.5\,\mathrm{mm})^2}}{0.5\,\mathrm{mm}+0.5\,\mathrm{mm}+\sqrt{25\,\mathrm{m}^2+(0.5\,\mathrm{mm}+0.5\,\mathrm{mm})^2}} \approx -1.499\,999\,99\times 10^{-10}\,\mathrm{T\,m}\mathbf{e}_z$$
.

3. [6] Apresente a dedução do teorema de Poynting. Informação de referência:

$$\nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{b}\cdot(\nabla\times\mathbf{a}) - \mathbf{a}\cdot(\nabla\times\mathbf{b}) \qquad \forall\mathbf{a}=\mathbf{a}(\mathbf{r}),\ \ \mathbf{b}=\mathbf{b}(\mathbf{r})$$

Resol. Lei de Ampère:

$$\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

Multipliquemos por $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} = \mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{H}) - \mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \tag{1}$$

Ponhamos na equação de referência $\mathbf{a}=\mathbf{E}$, $\mathbf{b}=\mathbf{H}$:

$$\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = \mathbf{H}\cdot\underbrace{\left(\nabla\times\mathbf{E}\right)}_{-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t};\ \text{Lei de Faraday}} - \mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{H}) \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{H}) = -\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} - \nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$$

Vamos somar esta equação e a Eq. (1):

$$\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} + \nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = -\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

Vamos integrar sobre um volume V:

$$\int_V \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}\,dV + \int_V \nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\,dV = -\int_V\left(\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)dV \tag{2}$$

Temos

$$\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \overset{\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}}{=} \mathbf{E}\cdot\frac{\partial(\varepsilon\mathbf{E})}{\partial t} = \varepsilon\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E^2}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon E^2}{2}\right)$$

$$\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \overset{\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}}{=} \frac{\mathbf{B}}{\mu}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{B^2}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{B^2}{2\mu}\right)$$

Teorema de divergência para o vector $\mathbf{E}\times\mathbf{H}$:

$$\int_V \nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\,dV = \oint_S (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot d\mathbf{S}$$

Eq. (2) passa a ser

$$\int_V \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}\,dV + \oint_S(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot d\mathbf{S} = -\int_V\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon E^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{B^2}{2\mu}\right)\right]dV \Leftrightarrow$$

$$-\frac{d}{dt}\left[\int_V\left(\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu}\right)dV\right] = \int_V \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}\,dV + \oint_S(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot d\mathbf{S}$$

Esta equação é conhecida por teorema de Poynting.

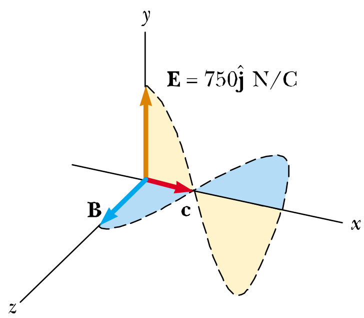
4. [5] Uma onda electromagnética sinusoidal de frequência $40,0\,\mathrm{MHz}$ propaga-se no espaço livre no sentido positivo do eixo x.

   (a) Determine o comprimento de onda e o período da onda.

   (b) Para o instante $t = 0$, o campo eléctrico num ponto com as coordenadas, em metros, $(1; 2; 3)$ atinge o seu valor máximo, $750\,\mathrm{N\,C^{-1}}$, e é dirigido segundo o sentido positivo do eixo y. Calcule o campo magnético neste ponto no mesmo instante $t = 0$.

   (c) As variações espaço-tempo dos campos eléctrico e magnético da onda são representadas na forma $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi_E)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi_B)$. Determine $\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{k}, \omega, \varphi_E, \varphi_B$.

Solução:



a) $c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \longrightarrow \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3.00 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{40.0 \times 10^6\,\mathrm{Hz}} = 7.50\,\mathrm{m}$

$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{40.0 \times 10^6\,\mathrm{Hz}} = 2.5 \times 10^{-8}\,\mathrm{s}$

b) $E_0 = cB_0 \longrightarrow B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{750\,\mathrm{N\,C^{-1}}}{3.00 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}} = 2.50 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$

Para determinar a direcção de $\mathbf{B}$ podemos utilizar $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, $\mathbf{S}$ é dirigido segundo $+x$ (direcção de propagação da onda), $\mathbf{E}$ é dirigido segundo $+y$, implica então pela regra dos três dedos que $\mathbf{B}$ é dirigido segundo $+z$.

Nota do livro: Because E and B must be perpendicular to each other and perpendicular to the direction of wave propagation (x in this case), we conclude that B is in the z direction.

$\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z \qquad$ ou $B = (0; 0; B_0)$

c) $\omega = 2\pi f = 2\pi\,\mathrm{rad} \times 40.0 \times 10^6\,\mathrm{Hz} = 2.51327 \times 10^8\,\mathrm{rad\,s^{-1}} \approx 2.51 \times 10^8\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$

$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\,\mathrm{rad}}{7.50\,\mathrm{m}} = 0.837\,758\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}} \approx 0.838\,\mathrm{rad\,m^{-1}}$

$\mathbf{k} \uparrow\uparrow \mathbf{e}_x \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{k} = +\frac{2\pi}{\lambda}\mathbf{e}_x = (0.838; 0; 0)\ \mathrm{rad\,m^{-1}} = 0.838\mathbf{e}_x\,\mathrm{rad\,m^{-1}}$

$\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_y = (0; E_0; 0) = (0; 750; 0)\ \mathrm{N\,C^{-1}}$

$\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z = (0; 0; B_0) = (0; 0; 2.50 \times 10^{-6})\ \mathrm{T}$

$\varphi_E : \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi_E) = \mathbf{E}_0 \sin(kx - \omega t + \varphi_E) = (0; 750; 0) \sin(kx - \omega t + \varphi_E)$

No ponto $(1; 2; 3)$ m e para o instante $t = 0$ o campo é máximo $\longrightarrow \sin(kx - \omega t + \varphi_E) = 1 \longrightarrow kx - \omega t + \varphi_E = \frac{\pi}{2}$

$0.838\,\mathrm{rad\,m^{-1}} \times 1\,\mathrm{m} + \varphi_E = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \varphi_E = \frac{\pi}{2} - 0.838\,\mathrm{rad} = 0.7328\,\mathrm{rad} \approx 0.73\,\mathrm{rad}$

$\varphi_B = \varphi_E \qquad$ (Para um meio não-condutor, as oscilações de $\mathbf{E}$ e de $\mathbf{B}$ estão em fase.)

5. [3] Considere a propagação de uma onda electromagnética num dado material (hipotético) que possui as seguintes características: condutividade $0.32\,\mathrm{S\,m^{-1}}$, permitividade relativa 300 e permeabilidade relativa 540.

   (a) A partir de que gama de frequência da onda electromagnética este material pode ser considerado um bom condutor?

(b) Determine a distância de atenuação (ou seja, a profundidade de penetração) no caso da frequência da onda ser $1,6\,\mathrm{MHz}$.

Informação de referência: A expressão para o campo eléctrico numa onda plana num meio condutor: $\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{E}_0 e^{-\beta z}\cos(\alpha z - \omega t + \varphi_E)$, onde

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{Q^2}}+1\right)^{1/2}, \quad \beta = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{Q^2}}-1\right)^{1/2}, \quad Q = \frac{\omega\varepsilon}{\sigma}$$

$\boxed{\text{Solução:}}$

a) $Q = \frac{\omega\varepsilon}{\sigma} = \frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon_r}{\sigma} = \frac{2\pi\times f\times 8.854\times 10^{-12}\times 300}{0.32} \ll 1 \longrightarrow f \ll \frac{0.32}{2\pi\times 8.854\times 10^{-12}\times 300} \ll 1.9174\times 10^7 \approx 2\times 10^7\,\mathrm{Hz}$.

b) Nota: $Q = \frac{\omega\varepsilon}{\sigma} = \frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon_r}{\sigma} = \frac{2\pi\times 1.6\times 10^6\times 8.854\times 10^{-12}\times 300}{0.32} = 8.3447\times 10^{-2}$

Variante 1: Sem aproximações

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{Q^2}}-1\right)^{1/2}} \\
&= \frac{1}{(2\pi\times 1.6\times 10^6)\sqrt{\frac{(8.854\times 10^{-12}\times 300)(4\pi\times 10^{-7}\times 540)}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{(8.3447\times 10^{-2})^2}}-1\right)^{1/2}} \\
&= 3.1556\times 10^{-2}\,\mathrm{m} \approx 3\,\mathrm{cm}
\end{aligned}$$

Variante 2: Usando a expressão aproximada para bons condutores:

$$\begin{aligned}
\Delta &= \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\mu_r\sigma}} = \sqrt{\frac{2}{2\pi\times 1.6\times 10^6\times 4\pi\times 10^{-7}\times 540\times 0.32}} \\
&= 3.0268\times 10^{-2}\,\mathrm{m} \approx 3\,\mathrm{cm}
\end{aligned}$$