1	2	3	4	5	T

Cadeira: ELECTROMAGNETISMO **Época: Normal**

Ano lectivo: 2017/2018 (1º Semestre) **TESTE 3** (2018/01/08) **Duração:** 1,5 horas

Nome: ________________________________Número:___________ Curso: **LEET**

A(s) questão(ões) 1 a 3 deve(m) ser respondida(s) neste enunciado. Nestas questões não se deve apresentar (e não serão cotadas) deduções ou cálculos; não vale a pena apresentar várias variantes da resposta (se, porventura, forem contraditórias, a resposta será considerada incorrecta). A(s) restante(s) questão(ões) deve(m) ser respondida(s) nas folhas de prova com as deduções e os cálculos relevantes. Constantes universais que podem ser necessárias para avaliações numéricas: $\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{T\,m\,A^{-1}}$, $e = 1,602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$, massa de um electrão $m_e = 9,109 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$.

1. [4] Escreva o teorema de Poynting (não é necessário apresentar a dedução) e descreva o sentido físico de cada um dos termos:

Res. Teorema de Poynting:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(\frac{\varepsilon \mathbf{E}^2}{2} + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu}\right) dV = \int_V \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}\,dV + \oint_S (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot d\mathbf{S}$$

$\int_V \left(\frac{\varepsilon \mathbf{E}^2}{2} + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu}\right) dV$: energia electromagnética dentro do volume V.

$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(\frac{\varepsilon \mathbf{E}^2}{2} + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu}\right) dV$: diminuição da energia electromagnética dentro do volume V por unidade do tempo.

$\int_V \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}\,dV$: a energia convertida em calor dentro do volume.

$\oint_S (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot d\mathbf{S}$: fluxo da energia electromagnética para fora do volume (através da superfície).

2. [4] Determine o campo magnético se o potencial vector é dado pela fórmula (k é uma constante escalar dada, $\mathbf{a}$ é um vector constante dado, $\mathbf{r}$ é o vector de posição)

   (a) $\mathbf{A} = (0, kx, 0)$
   Resposta ___

   (b) $\mathbf{A} = \left(-\frac{k}{3}y, 0, 0\right)$
   Resposta ___

(c) $\mathbf{A} = (-ky, kx, 0)$
Resposta ___

(d) $\mathbf{A} = \mathbf{a} \times \mathbf{r}$
Resposta ___

Avali: 1 valor por alínea

Res. a) $\boldsymbol{\nabla}\times(0, kx, 0) = (0, 0, k)$ b) $\boldsymbol{\nabla}\times\left(-\frac{k}{3}y, 0, 0\right) = \left(0, 0, \frac{1}{3}k\right)$ c) $\boldsymbol{\nabla}\times(-ky, kx, 0) = (0, 0, 2k)$ d) $\boldsymbol{\nabla}\times((a_1, a_2, a_3)\times(x, y, z)) = (2a_1, 2a_2, 2a_3) = 2\mathbf{a}$

3. [2] Escreva uma fórmula para uma grandeza escalar $\xi = \xi(\mathbf{r}, t)$ que descreva uma onda plana harmónica de amplitude ξ_0, de comprimento de onda λ e de frequência angular ω que se propaga no sentido negativo do eixo y. Sabe-se que no instante $t = 0$ a grandeza ξ no plano $y = \lambda/2$ é igual a ξ_0.

Resposta:

Resol.: $\xi = \xi_0 \sin\left(-\frac{2\pi}{\lambda}y - \omega t + \frac{3\pi}{2}\right) = -\xi_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}y + \omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -\xi_0 \cos\left(-\frac{2\pi}{\lambda}y - \omega t\right) = -\xi_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}y + \omega\right.$
Aceita-se qualquer uma das respostas.

4. [4] Considere um circuito em que uma resistência de $200\,\Omega$, uma bobina de indutância de $230\,\mathrm{mH}$ e um condensador de capacidade de $15,0\,\mu\mathrm{F}$ estão ligados em série a uma fonte de tensão alternada sinusoidal. A fonte produz uma tensão de amplitude $36,0\,\mathrm{V}$ e frequência $60,0\,\mathrm{Hz}$. Determine

(a) a amplitude da corrente no circuito e o desfasamento da corrente em relação à tensão fornecida pela fonte;

(b) a frequência de ressonância do circuito (em Hz).

Solução:

a) $I_0 = \frac{V_0}{|\widetilde{Z}|} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\left(-\frac{1}{\omega C}+\omega L\right)^2}} = \frac{36\,\mathrm{V}}{\sqrt{200^2+\left(-\frac{1}{2\pi(60.0)(15.0\times10^{-6})}+2\pi(60.0)(230\times10^{-3})\right)^2}} = \frac{36\,\mathrm{V}}{219.37\,\Omega} = 0.164\,\mathrm{A}$;

$\phi = -\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(\widetilde{Z})}{\mathrm{Re}(\widetilde{Z})}\right) = 24,3\,° = 0,423\,\mathrm{rad}$ (I está em avanço de fase de $0,423\,\mathrm{rad}$ em relação à tensão)

b) $f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 85,69\,\mathrm{Hz}$.

5. [6] Considere uma onda electromagnética plana que se propaga num meio condutor.

(a) Escreva as expressões para as seguintes grandezas: a distância de atenuação (ou seja, a profundidade de penetração) da onda, a velocidade de propagação da onda e a diferença de fase entre os campos eléctrico e magnético. Sugestão: se não se lembra das expressões pretendidas, pode deduzi-las utilizando a expressão para o campo eléctrico numa onda plana num meio condutor: $\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_0 e^{-\beta z}\cos(\alpha z - \omega t + \varphi_E)$, onde

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{Q^2}}+1\right)^{1/2}, \quad \beta = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{Q^2}}-1\right)^{1/2}, \quad Q = \frac{\omega\varepsilon}{\sigma}$$

(b) O meio em consideração possui as seguintes características: permitividade relativa é 700, permeabilidade relativa é 12 e condutividade eléctrica é $0.1\,\mathrm{S\,m^{-1}}$. A frequência da onda é $1,6\,\mathrm{MHz}$. O meio pode ser considerado um bom condutor, um bom isolador, ou nem um nem outro? Justifique a resposta.

(c) Para as condições especificadas na alínea (b), calcule a distância de atenuação da onda, a velocidade de propagação da onda e a diferença de fase entre os campos eléctrico e magnético.

$\boxed{\text{Solução:}}$

(a)

$$\Delta = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{Q^2}}-1\right)^{1/2}}$$

$$v = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{Q^2}}+1\right)^{1/2}} = \left(\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{Q^2}}+1}\right)^{1/2}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

$$\Omega = \arctan\frac{\beta}{\alpha} = \arctan\left(\frac{\sqrt{1+\frac{1}{Q^2}}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{Q^2}}+1}\right)^{1/2} = \arctan\left[\frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{Q^2}}-1\right)^2}{1+\frac{1}{Q^2}-1}\right]^{1/2} =$$

$$= \arctan\left[Q\left(\sqrt{1+\frac{1}{Q^2}}-1\right)\right] = \arctan\left(\sqrt{Q^2+1}-Q\right) = \arctan\frac{1}{\sqrt{Q^2+1}+Q}$$

(b) Para este caso temos que

$Q = \frac{\omega\varepsilon}{\sigma} = \frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon_r}{\sigma} = \frac{2\pi\times1.6\times10^6\times8.854\times10^{-12}\times700}{0.1} \approx 0.62$

Assim, não podemos classificar como bom condutor ou quase isolador e não podemos utilizar as fórmulas simplificadas.

c) Ficamos então com:

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{1}{\omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{Q^2}}-1\right)^{1/2}}\\ &= \frac{1}{(2\pi\times1.6\times10^6)\sqrt{\frac{(8.854\times10^{-12}\times700)(4\pi\times10^{-7}\times12)}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{(0.62)^2}}-1\right)^{1/2}} \approx 0.49\,\mathrm{m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v &= \left(\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{Q^2}}+1}\right)^{1/2}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} =\\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{(0.62)^2}}+1}\right)^{1/2}\frac{1}{\sqrt{(8.854\times10^{-12}\times700)\,(4\pi\times10^{-7}\times12)}} \approx 2.7\times10^6\,\mathrm{m\,s^{-1}}\end{aligned}$$

$$\Omega = \arctan\frac{1}{\sqrt{Q^2+1}+Q} = \arctan\frac{1}{\sqrt{(0.62)^2+1}+0.62} \approx 0.51\,\mathrm{rad} \approx 29^\circ$$