UNIVERSIDADE da MADEIRA

Mecânica dos Meios Contínuos

Série de exercícios 1 - Notação indicial

Nota: Os exercícios assinalados com ✠ serão resolvidos nas aulas.

1. ✠ Seja

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Avalie

$$S_{ii},\ S_{ij}S_{ij},\ S_{jk}S_{jk},\ S_{mn}S_{nm}$$

Solução:

$$S_{ii} = 5,\ S_{ij}S_{ij} = 28,\ S_{jk}S_{jk} = 28,\ S_{mn}S_{nm} = 23.$$

2. Escreva a forma completa da expressão

$$T_{ij} = A_{im}A_{jm}$$

Solução:

$$\begin{aligned} T_{11} &= A_{1m}A_{1m} = A_{11}A_{11} + A_{12}A_{12} + A_{13}A_{13} \\ T_{12} &= A_{1m}A_{2m} = A_{11}A_{21} + A_{12}A_{22} + A_{13}A_{23} \\ & \dots \\ T_{33} &= A_{3m}A_{3m} = A_{31}A_{31} + A_{32}A_{32} + A_{33}A_{33} \end{aligned}$$

3. ✠ Determine quais das seguintes equações têm o mesmo sentido que a equação $a_i = Q_{ij}a'_j$

$$a_l = Q_{lm}a'_m$$

$$a_p = Q_{qp}a'_q$$

$$a_m = a'_n Q_{mn}$$

Solução: $a_l = Q_{lm}a'_m$ (sim), $a_p = Q_{qp}a'_q$ (não), $a_m = a'_n Q_{mn}$ (sim)

4. Considere a equação

$$a_i + b_j = 0$$

O que é que se pode dizer sobre as grandezas a_1, a_2, a_3 e b_1, b_2, b_3?

Solução: $b_1 = b_2 = b_3 = -a_1 = -a_2 = -a_3$.

5. Temos

$$\mathbf{a} = [a_i] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \left[\widehat{B}\right] = [B_{ij}] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}, \quad \left[\widehat{C}\right] = [C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Escreva as expressões seguintes em notação de índice:

(a) $\widehat{D} = \underbrace{\widetilde{\widetilde{B}}}_{=\widehat{B}^T}$

(b) $\mathbf{b} = \widehat{B}\mathbf{a}$

(c) $\widehat{D} = \widehat{B}\widehat{C}$

(d) $\widehat{D} = \widehat{B}\widetilde{\widetilde{C}}$

$\boxed{\text{Solução:}}$ a) $(D_{ij} = B_{ji})$; b) $(b_i = B_{ij}a_j)$; c) $(D_{ij} = B_{im}C_{mj})$; d) $(D_{ij} = B_{im}C_{jm})$

6. Escreva a forma completa da equação $a_i = U_{im}V_{mk}c_k$.

$\boxed{\text{Solução:}}$

$$a_i = U_{i1}\left(V_{11}c_1 + V_{12}c_2 + V_{13}c_3\right) + U_{i2}\left(V_{21}c_1 + V_{22}c_2 + V_{23}c_3\right) + U_{i3}\left(V_{31}c_1 + V_{32}c_2 + V_{33}c_3\right)$$

Ou seja, a nossa equação representa de facto um sistema de três equações, tendo cada uma delas a soma de nove termos.

7. Seja

$$T_{ij} = 2\mu E_{ij} + \lambda E_{kk}\delta_{ij}$$

Encontre

$$W = \frac{1}{2}T_{ij}E_{ij}$$
$$p = T_{ij}T_{ij}$$

$\boxed{\text{Solução:}}$

$$W = \mu E_{ij}E_{ij} + \frac{\lambda}{2}\left(E_{kk}\right)^2$$
$$p = 4\mu^2 E_{ij}E_{ij} + \left(E_{kk}\right)^2\left(4\mu\lambda + 3\lambda^2\right)$$

8. ✠ Seja

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \widehat{S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Encontre

$$\widehat{T},\ \text{com } T_{ij} = \varepsilon_{ijk}a_k$$
$$\mathbf{c},\ \text{com } c_i = \varepsilon_{ijk}S_{jk}$$
$$\mathbf{d},\ \text{com } d_k = \varepsilon_{ijk}a_ib_j$$

$\boxed{\text{Solução:}}$

$$\widehat{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

9. ✠ Seja

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

onde

$$d_k = \varepsilon_{ijk} a_i b_j.$$

Prove que

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

10. ✠ Prove que as condições

$$\varepsilon_{ijk} T_{jk} = 0 \text{ e } T_{ij} = T_{ji}$$

são equivalentes.

11. ✠ Mostre que

$$\delta_{ij} \varepsilon_{ijk} = 0$$

12. Escreva todas as contracções de $E_{ij}F_{km}$ tais que o resultado seja uma grandeza com dois índices.

Solução:

$$E_{ij}F_{im} = G_{jm} \quad E_{ij}F_{ki} = H_{jk} \quad E_{ij}F_{jm} = Q_{im} \quad E_{ij}F_{kj} = R_{ik} \quad E_{ii}F_{km} = K_{km} \quad E_{ij}F_{kk} = P_{ij}$$

13. ✠ Prove que

$$\varepsilon_{ijm}\varepsilon_{klm} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$$

14. ✠ Pela contracção da fórmula

$$\varepsilon_{ijm}\varepsilon_{klm} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$$

mostre que

$$\varepsilon_{ilm}\varepsilon_{jlm} = 2\delta_{ij}$$

e determine $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}$.

Solução:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 2\delta_{ii} = 6$$

15. Escreva a fórmula

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{c}$$

em notação de índice e provar o resultado directamente.

Solução:

$$\varepsilon_{lkn}\varepsilon_{ijk} a_l b_i c_j = a_i c_i b_n - a_i b_i c_n$$

16. Prove que, se

$$T_{ij} = -T_{ji},$$

então

$$T_{ij} a_i a_j = 0$$

17. Prove que, se

$$T_{ij} = -T_{ji} \text{ e } S_{ij} = S_{ji},$$

então

$$T_{ij} S_{ij} = 0$$

18. ✠ Represente uma matriz S_{ij} como uma soma de uma matriz simétrica e outra antisimétrica.

    $\boxed{\text{Solução:}}$

$$T_{ij} = \frac{S_{ij} + S_{ji}}{2}, \quad R_{ij} = \frac{S_{ij} - S_{ji}}{2}$$

19. ✠ Temos uma função $f(x_1, x_2, x_3)$. Exprima o diferencial desta função em notação de índice.

    $\boxed{\text{Solução:}}$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

20. Prove a fórmula

$$\det [A_{ij}] = \varepsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3}$$