UNIVERSIDADE da MADEIRA

Mecânica dos Meios Contínuos

Série de exercícios 2 - Tensores

Nota: Os exercícios assinalados com ✠ serão resolvidos nas aulas TP.

1. ✠ Seja $\widehat{S}$ uma transformação que consiste numa rotação do espaço de 90º, com $\mathbf{e}_1$ pertencente ao eixo de rotação. Determine a matriz desta transformação.

   $\boxed{\text{Solução:}}$ $\left[\widehat{S}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

2. ✠ Seja $\widehat{N}$ uma transformação que consiste numa rotação do espaço de um ângulo arbitrário, com $\mathbf{e}_1$ pertencente ao eixo de rotação.

   (a) Determine a matriz desta transformação.

   (b) Verifique o resultado da alínea anterior para uma rotação de 45º.

   $\boxed{\text{Solução:}}$ a) $\left[\widehat{N}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

   b) $\left[\widehat{N}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

3. ✠ Sejam $\widehat{T}$ e $\widehat{S}$ tensores. Prove que o produto $\widehat{T}\widehat{S}$ é um tensor.

4. ✠ Considere a transformação $\widehat{R}$ tratada no Exemplo 2.3 (veja os apontamentos das aulas teóricas) e a transformação $\widehat{S}$ do exercício 1 desta série.

   (a) Considere a seguinte transformação: Primeiro faz-se a transformação $\widehat{R}$ e depois a transformação $\widehat{S}$. Determine a matriz da transformação resultante e a posição do ponto $P(1,1,0)$ depois de ambas as transformações.

   (b) Mude a ordem das transformações e encontre a nova posição de P. É a mesma? Comente o resultado do ponto de vista de não comutatividade do produto de tensores.

   $\boxed{\text{Solução:}}$

   a) $\left(\widehat{S}\widehat{R}\right)\mathbf{r}_p = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; b) $\left(\widehat{R}\widehat{S}\right)\mathbf{r}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

5. ✠ Prove que $\widehat{I}$ é um tensor.

6. ✠ Prove que

$$\widetilde{\widehat{S}\widehat{T}} = \widetilde{\widehat{T}}\ \widetilde{\widehat{S}}$$

7. ✠ Considere a reflexão de espelho, tratada no Exemplo 2.1 (veja os apontamentos das aulas teóricas).

   (a) Verifique que este tensor satisfaz a igualdade $\widehat{T}\widetilde{\widehat{T}} = \widehat{I}$.

   (b) Avalie $\det\left[\widehat{T}\right]$.

8. ✠ Considere a rotação, tratada no Exemplo 2.3 (veja os apontamentos das aulas teóricas).

   (a) Verifique que o tensor do exemplo 2.3 satisfaz a igualdade $\widehat{R}\widetilde{\widehat{R}} = \widehat{I}$.

   (b) Avalie $\det\left[\widehat{R}\right]$.

9. Prove que $T_{ij}T_{ji}$ é um invariante.

10. Seja $\hat{C}$ uma transformação linear que transforma qualquer tensor de segunda ordem $\hat{E}$ num outro tensor de segunda ordem $\hat{T}$. Prove que $\hat{C}$ é um tensor de quarta ordem.

11. Um tensor de terceira ordem pode ser definido também da seguinte maneira: é uma transformação linear que transforma qualquer vector num tensor de segunda ordem. Prove que os componentes deste tensor, definidos como

$$M_{ijk} = \mathbf{e}_i \cdot \left(\widehat{M}\mathbf{e}_k\right)\mathbf{e}_j$$

   transformam-se segundo a regra de transformação de componentes de tensores de terceira ordem. Note-se que $\left(\widehat{M}\mathbf{e}_k\right)$ é um tensor de ordem 2 $\Longrightarrow$ $\left(\widehat{M}\mathbf{e}_k\right)\mathbf{e}_j$ é um vector $\Longrightarrow$ $\mathbf{e}_i \cdot \left(\widehat{M}\mathbf{e}_k\right)\mathbf{e}_j$ é um escalar como deve ser.

12. Um produto de tríade $\mathbf{abc}$ é definido como uma transformação que transforma um vector $\mathbf{d}$ arbitrário no tensor de segunda ordem $(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{ab})$:

$$(\mathbf{abc})\,\mathbf{d} = (\mathbf{c}\cdot\mathbf{d})\,(\mathbf{ab})$$

   Note-se que $\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}$ é um escalar, $\mathbf{ab}$ é um produto de díade, ou seja, um tensor de segunda ordem; os parênteses no lado direito não são necessários mas são convenientes. Encontre as componentes do produto de tríade, utilizando a definição do exemplo 2.9.

   $\boxed{\text{Solução:}}$ $(\mathbf{abc})_{ijk} = a_i b_j c_k$

13. ✠ Já vimos que o vector dual é dado por:

$$\left[\mathbf{t}^A\right] = \begin{bmatrix} T_{32} \\ T_{13} \\ T_{21} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} T_{23} \\ T_{31} \\ T_{12} \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{t}^A = T_{32}\mathbf{e}_1 + T_{13}\mathbf{e}_2 + T_{21}\mathbf{e}_3 = -T_{23}\mathbf{e}_1 - T_{31}\mathbf{e}_2 - T_{12}\mathbf{e}_3$$

   prove que este resultado pode ser escrito na seguinte forma equivalente:

$$\mathbf{t}^A = -\frac{\varepsilon_{ijk}}{2}\mathbf{e}_i T_{jk}$$

14. ✠ Considere o seguinte tensor:

$$\left[\widehat{T}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   (a) Encontre as suas partes simétrica e antisimétrica.

(b) Encontre o vector dual para a parte antisimétrica.

(c) Prove que $\widehat{T}^A \mathbf{a} = \mathbf{t}^A \times \mathbf{a}$ para $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$.

$\boxed{\text{Solução:}}$ a) $\left[\widehat{T}^S\right] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \left[\widehat{T}^A\right] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{t}^A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

15. ✠ Considere um tensor de rotação de 90º. Prove que o vector dual da parte antisimétrica é dirigido segundo o eixo de rotação.

16. Considere um tensor que descreve uma rotação arbitrária. Prove que o vector dual da parte antisimétrica é dirigido segundo o eixo de rotação.

17. ✠ Sejam $T_{12} = T_{32} = 0$. Prove que $\mathbf{e}_2$ é um vector próprio e encontre o valor próprio associado a este vector.

    $\boxed{\text{Solução:}}$ O valor próprio e associado a este vector é T_{22}.

18. Sejam $T_{13} = T_{23} = 0$. Prove que $\mathbf{e}_3$ é um vector próprio e encontre o valor próprio associado a este vector.

    $\boxed{\text{Solução:}}$ O valor próprio e associado a este vector é T_{33}.

19. ✠ Calcule os valores e vectores próprios associados ao seguinte tensor

$$\left[\widehat{T}\right] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{Solução:}}$ $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 5,\ \lambda_3 = -5;\ \mathbf{n}_1 = \pm\mathbf{e}_1;\ \mathbf{n}_2 = \pm\frac{2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3}{\sqrt{5}};\ \mathbf{n}_3 = \pm\frac{\mathbf{e}_2-2\mathbf{e}_3}{\sqrt{5}}$

20. ✠ Calcule os valores e vectores próprios do tensor de rotação de 90º em torno do $\mathbf{e}_3$.

    $\boxed{\text{Solução:}}$ $\lambda_1 = 1,\ \mathbf{n}_1 = \pm\mathbf{e}_3$

21. ✠ Calcule os valores e vectores próprios do seguinte tensor

$$\left[\widehat{T}\right] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{Solução:}}$ $\lambda_2 = \lambda_3 = 2;\ \lambda_1 = 3;\ \mathbf{n}_1 = \pm\mathbf{e}_3$; $\mathbf{n}_2$ é qualquer vector unitário ortogonal a $\mathbf{e}_3$, e.g. $\mathbf{n}_2 = \mathbf{e}_1$, para $\mathbf{n}_3$, podemos escolher, por exemplo $\mathbf{n}_3 = \mathbf{e}_2$

22. Prove que os únicos valores próprios possíveis de um tensor ortogonal são $\lambda = 1$; $\lambda = -1$.

23. Seja $\mathbf{n}$ um vector próprio real de um tensor real antisimétrico. Prove que o valor próprio associado é nulo.

24. Calcule os valores e vectores próprios do tensor identidade.

25. ✠ Considere o seguinte tensor

$$\left[\widehat{T}\right] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule os invariantes escalares do tensor.

(b) Utilizando a equação

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0$$

determine os valores próprios.

(c) Verifique as seguintes equações:

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1$$

$$I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

Solução:

a) $I_1 = 2$; $I_2 = -25$; $I_3 = -50$; b) $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 5$; $\lambda_3 = -5$

26. ✠ Seja $\alpha(\mathbf{r})$ uma função escalar e $\widehat{T}(\mathbf{r})$ uma função tensorial. Mostre que

$$\text{div}\left(\alpha\widehat{T}\right) = \widehat{T}(\nabla\alpha) + \alpha\text{div}\widehat{T}$$