UNIVERSIDADE da MADEIRA

Mecânica dos Meios Contínuos

Série de exercícios 3 - Cinemática dos Meios Contínuos

1. Seja o movimento de um corpo descrito em componentes por

$$x_1 = X_1 + t^2 X_2; \quad x_2 = X_2 + t^2 X_1; \quad x_3 = X_3$$

   Determine

   (a) O trajecto da partícula originalmente em $\mathbf{X} = (1, 2, 1)$.

   (b) As componentes da velocidade e da aceleração para a mesma partícula para $t = 2\,\mathrm{s}$.

2. Inverta as equações do movimento do exercício anterior e determine a velocidade e a aceleração da partícula em $\mathbf{x} = (1, 0, 1)$ para $t = 2\,\mathrm{s}$.

3. A descrição material (ou descrição de Lagrange) do movimento de um contínuo é dada por

$$x_1 = X_1 e^t + X_3 \left(e^t - 1\right), x_2 = X_3 \left(e^t - e^{-t}\right) + X_2, x_3 = X_3$$

   Determine a descrição espacial (ou descrição de Euler).

4. Para o movimento do exercício anterior determine os campos de aceleração e velocidade e expresse-os nas formas de Lagrange e de Euler.

5. A posição para o tempo t, para uma partícula inicialmente em (X_1, X_2, X_3), é dada pelas equações:

$$x_1 = X_1 + (X_1 + X_2)\, t; \quad x_2 = X_2 + (X_1 + X_2)\, t; \quad x_3 = X_3$$

   (a) Encontre a velocidade em $t = 2$ para a partícula que se encontrava em $(1, 1, 0)$ no tempo de referência.

   (b) Encontre a velocidade em $t = 2$ para a partícula que se encontra na posição $(1, 1, 0)$ para $t = 2$.

6. Seja o movimento de um contínuo dado pelas equações em forma de componentes

$$x_1 = X_1 e^{-t}; \quad x_2 = X_2 e^t; \quad x_3 = X_3 + X_2 \left(e^{-t} - 1\right)$$

   e o campo de temperatura do corpo dado pela descrição espacial

$$\theta = e^{-t} (x_1 - 2x_2 + 3x_3)$$

   Determine o campo de velocidade na forma espacial, e usando isso, calcule a derivada material $D\theta/Dt$ do campo de temperatura.

7. Seja o movimento de um contínuo

$$x_1 = X_1 + ktX_2; \quad x_2 = X_2; \quad x_3 = X_3$$

   Se o campo de temperatura é dado pela descrição espacial

$$\theta = x_1 + x_2$$

   (a) Encontre a descrição material da temperatura.

(b) Obtenha a velocidade e a taxa de variação da temperatura para partículas materiais particulares e expresse a resposta nas descrições material e espacial.

8. Obtenha a derivada material $\frac{D\theta}{Dt}$ para o movimento e campo de temperatura dado no exercício anterior.

9. Para eixos materiais e espaciais sobrepostos, o vector deslocamento de um corpo é dado por $\mathbf{u} = 4X_1^2\mathbf{e}_1 + X_2X_3^2\mathbf{e}_2 + X_1X_3^2\mathbf{e}_3$. Determine a localização após o deslocamento de uma partícula originalmente em $(1, 0, 2)$.

10. Dado o campo de deslocamento

$$u_1 = k\left(2X_1 + X_2^2\right); \quad u_2 = k\left(X_1^2 - X_2^2\right); \quad u_3 = 0; \quad k = 10^{-4}$$

(a) Encontre o alongamento relativo e a alteração do ângulo para dois elementos materiais $d\mathbf{X}_1 = dX_1\mathbf{e}_1$ e $d\mathbf{X}_2 = dX_2\mathbf{e}_2$ que começam no ponto $\mathbf{X} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$.

(b) Encontre a posição deformada destes dois elementos $d\mathbf{X}_1$ e $d\mathbf{X}_2$.

11. Um cubo unitário com as arestas paralelas aos eixos coordenados sofre o seguinte campo de deslocamento:

$$u_1 = kX_1; \quad u_2 = u_3 = 0; \quad k = 10^{-4}$$

Encontre o aumento de comprimento da diagonal AB que liga o ponto $A\,(0, 0, 0)$ a $B\,(1, 1, 0)$

(a) usando o tensor de deformação infinitesimal.

(b) ✠ usando geometria.

12. Para o campo de velocidade $\mathbf{v} = kx_2^2\mathbf{e}_1$, encontre:

(a) o tensor velocidade de deformação e o tensor de spin (também designado por tensor de rotação).

(b) a velocidade de deformação do elemento material $d\mathbf{x} = (ds)\,\mathbf{n}$ em que $n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$ em $\mathbf{x} = 5\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$.

13. Para o campo de velocidade $\mathbf{v} = \left(\frac{t+k}{1+x_1}\right)\mathbf{e}_1$, encontre as velocidades de deformação para os seguintes elementos materiais: $d\mathbf{x}_1 = ds_1\mathbf{e}_1; d\mathbf{x}_2 = \left(\frac{ds_2}{\sqrt{2}}\right)(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$ na origem para $t = 1$.

14. Considere o seguinte campo de velocidade

$$v_1 = k\,(x_2 - 2)^2\,x_3; \quad v_2 = -x_1x_2; \quad v_3 = kx_1x_3$$

Para um fluido incompressível, determine k de maneira a que a equação de conservação da massa seja satisfeita.

15. Na descrição espacial, a densidade de um fluido incompressível é dada por $\rho = kx_2$. Encontre a forma do campo de velocidades com $v_3 = 0$, de maneira a que a equação de conservação da massa seja satisfeita. Sugestão: comece por utilizar a definição de fluido incompressível para determinar v_2.

16. Considere o seguinte campo de velocidade

$$\mathbf{v} = x_1t\mathbf{e}_1 + x_2t\mathbf{e}_2$$

Determine como varia com o tempo a densidade do fluido, se na descrição espacial é apenas uma função do tempo.

17. Considere o seguinte tensor de deformação infinitesimal

$$\left[\widehat{E}\right] = \begin{bmatrix} X_1^2 & X_2^2 & X_1X_3 \\ X_2^2 & X_3 & X_3^2 \\ X_1X_3 & X_3^2 & 5 \end{bmatrix}$$

Este tensor verifica as condições de compatibilidade?

18. Sejam as componentes do tensor de deformação infinitesimal dadas por

$$E_{11} = \frac{1}{\alpha} f\left(X_2, X_3\right); \quad E_{22} = E_{33} = -\frac{\nu}{\alpha} f\left(X_2, X_3\right); \quad E_{12} = E_{13} = E_{23} = 0$$

Mostre que para o tensor de deformação infinitesimal ser compatível $f\left(X_2, X_3\right)$ tem de ser linear em cada um dos argumentos.

Soluções:

1a) $x_1 = 1 + 2t^2, x_2 = 2 + t^2, x_3 = 1$; b) $v_1 = 8, v_2 = 4, v_3 = 0, a_1 = 4, a_2 = 2, a_3 = 0$; 2) $v_1 = \frac{16}{15}, v_2 = -\frac{4}{15}, v_3 = 0, a_1 = \frac{8}{15}, a_2 = -\frac{2}{15}, a_3 = 0$; 3) $X_1 = x_1 e^{-t} + x_3\left(e^{-t} - 1\right), X_2 = x_2 + x_3\left(e^{-t} - e^{t}\right), X_3 = x_3$; 4) $v_1 = \left(X_1 + X_3\right) e^t, v_2 = X_3\left(e^t + e^{-t}\right), v_3 = 0, a_1 = \left(X_1 + X_3\right) e^t, a_2 = X_3\left(e^t - e^{-t}\right), a_3 = 0$, $v_1 = x_1 + x_3, v_2 = x_3\left(e^t + e^{-t}\right), v_3 = 0, a_1 = x_1 + x_3, a_2 = x_3\left(e^t - e^{-t}\right), a_3 = 0$; 5a) $\mathbf{v} = (2, 2, 0)$; b) $\mathbf{v} = \left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, 0\right)$; 6) $\frac{D\theta}{Dt} = -2x_1 e^{-t} - 3x_2 e^{-3t} - 3x_3 e^{-t}$; 7a) $\theta = X_1 + (1 + kt) X_2$; b) $\mathbf{v} = \left(kX_2, 0, 0\right), \mathbf{v} = \left(kx_2, 0, 0\right), \left.\frac{\partial\theta}{\partial t}\right|_{\mathbf{X}\text{ fixo}} = kX_2 = kx_2$; 8) $\frac{D\theta}{Dt} = kx_2$; 9) $\mathbf{x} = (5, 0, 6)$; 10a) Alongamento relativo: 2×10^{-4}, alteração do ângulo: 0; 11) $\frac{k}{2}\sqrt{2}$; 12a) $\left[\widehat{D}\right] = \begin{bmatrix} 0 & kx_2 & 0 \\ kx_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \left[\widehat{W}\right] = \begin{bmatrix} 0 & kx_2 & 0 \\ -kx_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; b) $3k$; 13) $-(1 + k), -\frac{(1+k)}{2}$; 14) $k = 1$; 15) $v_1 = v_1\left(x_2, x_3\right), v_2 = v_3 = 0$; 16) $\rho = \rho_0 e^{-t^2}$; 17) Não