UNIVERSIDADE da MADEIRA

Mecânica dos Meios Contínuos

Série de exercícios 4 - Tensão

1. Sejam as componentes do tensor das tensões no ponto P dadas por

$$\left[\widehat{T}\right] = \begin{bmatrix} 21 & -63 & 42 \\ -63 & 0 & 84 \\ 42 & 84 & -21 \end{bmatrix}$$

nas unidades MPa. Determine:

   (a) O vector de tensão no plano em P que tem a normal unitária dada por $\mathbf{n} = \frac{1}{7}(2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3)$.

   (b) O vector de tensão no plano em P paralelo ao plano ABC, onde $A = (1,0,0)\,; B = (0,1,0)\,; C = (0,0,2)$.

2. As componentes do tensor das tensões no ponto P são dadas em MPa e em relação aos eixos $x_1x_2x_3$ pela matriz

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} 57 & 0 & 24 \\ 0 & 50 & 0 \\ 24 & 0 & 43 \end{bmatrix}$$

Determine as tensões principais e as direcções principais da tensão em P.

3. A matriz do tensor das tensões em MPa em relação aos eixos $x_1x_2x_3$ é

$$\left[\widehat{T}\right] = \begin{bmatrix} 3 & -10 & 0 \\ -10 & 0 & 30 \\ 0 & 30 & -27 \end{bmatrix}$$

Determine as tensões principais e as direcções principais da tensão.

4. O tensor das tensões em P é dado em relação a $x_1x_2x_3$ na forma de matriz em unidades de MPa por

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} 4 & b & b \\ b & 7 & 2 \\ b & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

onde b é desconhecido. Sabendo as seguintes relações para as tensões principais: $T_3 = 3\,\text{MPa}; T_1 = 2T_2$. Determine:

   (a) as tensões principais.

   (b) O valor de b.

   (c) A direcção principal de T_2.

5. O estado de tensão num ponto P é dado em MPa em relação aos eixos $x_1x_2x_3$ pela matriz

$$\left[\widehat{T}\right] = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -30 & -60 \\ 0 & -60 & 5 \end{bmatrix}$$

(a) Determine o vector de tensão no plano cuja normal é $\mathbf{n} = \frac{1}{3}(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3)$.

(b) Determine as componentes normal e tangencial da tensão no mesmo plano.

6. Se a tensão num ponto é dada por

$$\left[\widehat{T}\right] = \begin{bmatrix} 300 & 0 & 0 \\ 0 & -200 & 0 \\ 0 & 0 & 400 \end{bmatrix} \text{kPa}$$

encontre:

(a) a magnitude da tensão tangencial no plano cuja normal é na direcção de $2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

(b) a tensão tangencial máxima.

7. Suponha que o vector de forças de corpo $\mathbf{B} = -g\mathbf{e}_3$, onde g é constante. Considere o seguinte tensor de tensão

$$\left[\widehat{T}\right] = \alpha \begin{bmatrix} x_2 & -x_3 & 0 \\ -x_3 & 0 & -x_2 \\ 0 & -x_2 & T_{33} \end{bmatrix}$$

e encontre uma expressão para T_{33} tal que $\widehat{T}$ satisfaça as equações de equilíbrio.

8. Considere a seguinte distribuição de tensão

$$\left[\widehat{T}\right] = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & T_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ T_{12}(x_1, x_2) & x_1 - 2x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 \end{bmatrix}$$

encontre T_{12} de maneira que a distribuição de tensão esteja em equilíbrio com forças de corpo nulas e de maneira a que o vector de tensão em $x_1 = 1$ seja dado por $\mathbf{t} = (1 + x_2)\mathbf{e}_1 + (5 - x_2)\mathbf{e}_2$.

9. O tensor das tensões em P relativamente aos eixos $x_1x_2x_3$ tem componentes em MPa dadas por

$$\left[\widehat{T}\right] = \begin{bmatrix} T_{11} & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

onde T_{11} não é especificado. Determine a direcção $\mathbf{n}$ em P para a qual o plano perpendicular a $\mathbf{n}$ é livre de tensão, ou seja, para a qual $\mathbf{t_n} = 0$ nesse plano. Qual é o valor requerido para T_{11} para esta condição.

10. Em relação aos eixos $x_1x_2x_3$ o estado de tensão é dado em termos de coordenadas pela matriz

$$\left[\widehat{T}\right] = \begin{bmatrix} x_1x_2 & x_2^2 & 0 \\ x_2^2 & x_2x_3 & x_3^2 \\ 0 & x_3^2 & x_3x_1 \end{bmatrix}$$

Determine:

(a) as componentes das forças de corpo como funções das coordenadas se as equações de equilíbrio são satisfeitas em todo o lado.

(b) o vector de tensão no ponto $P\,(1,2,3)$ no plano cuja normal unitária dirigida para fora faz ângulos iguais com os eixos positivos das coordenadas.

11. Relativamente aos eixos cartesianos $x_1x_2x_3$ o campo de tensões é dado por

$$\left[\widehat{T}\right] = \begin{bmatrix} \left(1-x_1^2\right)x_2 + \frac{2}{3}x_2^3 & -\left(4-x_2^2\right)x_1 & 0 \\ -\left(4-x_2^2\right)x_1 & -\frac{1}{3}\left(x_2^3-12x_2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(3-x_1^2\right)x_2 \end{bmatrix}$$

(a) Mostre que as equações de equilíbrio são satisfeitas em todo o lado para forças de corpo nulas.

(b) Determine o vector de tensão no ponto $P\,(2,-1,6)$ pertencente ao plano cuja equação é $3x_1+6x_2+2x_3=12$.

Soluções:

1a) $\mathbf{t_n} = (69, 54, -42)$ MPa; b) $\mathbf{t_n} = (-14, -14, 77)$ MPa; 2) $T_1 = 25\,\mathrm{MPa}, T_2 = 50\,\mathrm{MPa}, T_3 = 75\,\mathrm{MPa}; \mathbf{n}_1 = \left(\pm\frac{3}{5}, 0, \mp\frac{4}{5}\right), \mathbf{n}_2 = (0, \pm 1, 0), \mathbf{n}_3 = \left(\pm\frac{4}{5}, 0, \pm\frac{3}{5}\right)$; 3 $T_1 = 0\,\mathrm{MPa}, T_2 = 23\,\mathrm{MPa}, T_3 = -47\,\mathrm{MPa}; \mathbf{n}_1 = (\pm 0.912, \pm 0.274, \pm 0.304)$; 4a) $T_1 = 8\,\mathrm{MPa}, T_2 = 4\,\mathrm{MPa}, T_3 = 3\,\mathrm{MPa}$; b) $b = 0$; c) $\mathbf{n}_2 = (\pm 1, 0, 0)$; 5a) $\mathbf{t_n} = \frac{50}{3}(1, -3, -1)$ MPa; b) $T_N \approx -16{,}67\,\mathrm{MPa}, T_S \approx 52{,}70\,\mathrm{MPa}$; 6a) $T_S \approx 260{,}10\,\mathrm{kPa}$; b) $T_{Smax} = 300\,\mathrm{kPa}$; 7) $T_{33} = \left(\frac{\rho g}{\alpha} + 1\right)x_3 + f\,(x_1, x_2)$; 8) $T_{12} = 2x_1 - x_2 + 3$; 9) $\mathbf{n} = \frac{2}{3}\left(1, -\frac{1}{2}, -1\right), T_{11} = 2\,\mathrm{MPa}$; 10a) $\mathbf{B} = -\frac{1}{\rho}(3x_2, 3x_3, x_1)$; b) $\mathbf{t_n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(6, 19, 12)$; 11b) $\mathbf{t_n} = \frac{1}{7}(-29, -40, 2)$.