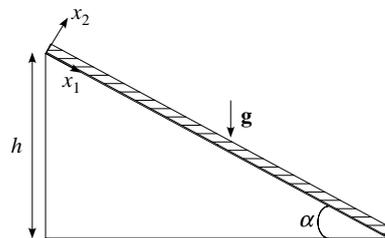




UNIVERSIDADE da MADEIRA
Mecânica dos Meios Contínuos

Série de exercícios 5 - Conjuntos Completos de Equações para Modelos Simples dos Meios Contínuos

1. **Exemplo 1** Uma camada de água escorrega, devido a acção do seu peso, por um plano inclinado de inclinação $\alpha = 30^\circ$ e de altura $h = 0,5$ m (ver figura). A corrente de água está limitada pelas paredes laterais e a distância entre as paredes (a largura de escoamento) é $a = 10$ cm. A taxa volúmica de escoamento é $G = 2$ l/s. A pressão fora da água é atmosférica, $p = p_0$, a espessura da camada no topo do plano $\delta_0 = 1$ cm. Despreze a viscosidade da água. Encontre os seguintes parâmetros no ponto mais baixo (saída) do plano: a velocidade de água, a espessura da camada, a pressão exercida pela água sobre o plano.



2. Se as constantes de Lamé para um material são: $\lambda = 119,2$ GPa; $\mu = 79,2$ GPa, encontre o módulo de Young, a razão de Poisson e o módulo de volume.
3. Seja o módulo de Young $E_Y = 193$ GPa e o módulo de torção $\mu = 76$ GPa, encontre a razão de Poisson ν , a constante de Lamé λ e o módulo de volume k .
4. Considere as seguintes componentes do tensor de deformação num ponto de aço estrutural: $E_{11} = 100 \times 10^{-6}$, $E_{22} = -50 \times 10^{-6}$, $E_{33} = 200 \times 10^{-6}$, $E_{12} = -100 \times 10^{-6}$, $E_{23} = 0$, $E_{13} = 0$. Encontre as componentes da tensão sabendo que as constantes de Lamé são: $\lambda = 119,2$ GPa; $\mu = 79,2$ GPa.
5. Considere o tensor da tensão

$$[\widehat{T}] = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Sabendo que $\mu = 79,2$ GPa, $\nu = 0,30$:

- (a) Encontre o tensor de deformação infinitesimal.
- (b) Suponha que uma esfera de 5 cm de raio está sob a influência deste campo de tensão, qual será a mudança de volume da esfera?
6. **Exemplo 5** Para água a 20°C , $\mu = 10^{-3}$ Pa · s. Seja o campo de velocidade

$$v_1 = -k(x_1 + x_2), \quad v_2 = k(x_2 - x_1), \quad v_3 = 0, \quad k = 1 \text{ s}^{-1}$$

Considere dentro da água um volume com uma das faces plana e com a normal externa no sentido \mathbf{e}_1 .

- (a) Encontre a diferença entre a tensão normal de compressão e a pressão hidrostática p ;
- (b) Encontre a tensão tangencial.

7. Considere o seguinte campo de velocidade em m s^{-1} para um fluido newtoniano incompressível com uma viscosidade $\mu = 0.96 \text{ mPa}$:

$$v_1 = x_1^2 - x_2^2; v_2 = -2x_1x_2; v_3 = 0$$

No ponto $(1, 2, 1) \text{ m}$ e no plano cuja normal é na direção de \mathbf{e}_1 encontre:

- a diferença entre a tensão normal total de compressão e a pressão p .
- a tensão tangencial.

8. Dado o campo de velocidade para um fluido viscoso linear

$$v_1 = kx_1, \quad v_2 = -kx_2, \quad v_3 = 0$$

- Mostre que o campo de velocidade é irrotacional.
- Encontre o tensor da tensão, considerando os coeficientes de viscosidade e de viscosidade de volume do fluido como conhecidos.
- Encontre o campo de aceleração.
- Encontre a distribuição da pressão, usando a equação de Navier-Stokes e desprezando as forças de corpo. Considere $p = p_0$ na origem.

9. Repita o exercício anterior para o seguinte campo de velocidade:

$$v_1 = k(x_1^2 - x_2^2), \quad v_2 = -2kx_1x_2, \quad v_3 = 0$$

10. Mostre que para o campo de velocidades

$$v_1 = v(y, z), \quad v_2 = v_3 = 0$$

a equação de Navier-Stokes, com $\rho \mathbf{B} = \mathbf{0}$, reduz-se a

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}$$

11. **Exemplo 6** Determine a forma geral da matriz do tensor da tensão para um escoamento unidimensional $\mathbf{v} = (v_1, 0, 0)$ de um fluido incompressível.

Soluções:

- 1) $v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gx_1 \sin \alpha} = 3.7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\delta = \frac{G}{av_1} = 5.4 \text{ mm}$; $p|_{x_2=0, x_1 \sin \alpha=h} = p_0 + \delta \rho g \cos \alpha \approx 1 \text{ bar}$;
 2) $E_Y = 207 \text{ GPa}$; $\nu = 0,30$; $k = 172 \text{ GPa}$; 3) $\nu = 0,27$; $\lambda = 89 \text{ GPa}$; $k = 140 \text{ GPa}$; 4) $[\hat{T}] =$

$$\begin{bmatrix} 45640 & -15840 & 0 \\ -15840 & 21880 & 0 \\ 0 & 0 & 61480 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ Pa}$$
; 5a) $[\hat{E}] = \begin{bmatrix} 3,34 & 1,26 & 0 \\ 1,26 & -2,33 & 0 \\ 0 & 0 & -0,44 \end{bmatrix} \times 10^{-5}$; b) $\Delta V = 3 \times 10^{-3} \text{ cm}^3$;
 6a) $-T_{11} - p = 2\mu k = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}$; b) $T_{21} = -2\mu k = -2 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}$; $T_{31} = 2\mu D_{31} = 0$; 7a) $-4\mu = -3,84 \times$
 10^{-3} Pa ; b) $T_{21} = -8\mu \text{ Pa} = -7,68 \times 10^{-3} \text{ Pa}$; $T_{31} = 0 \text{ Pa}$; 8b) $[\hat{T}] = \begin{bmatrix} -p + 2\mu k & 0 & 0 \\ 0 & -p - 2\mu k & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$;
 c) $\mathbf{a} = k^2(x_1, x_2, 0)$; d) $p = p_0 - \frac{\rho k^2}{2}(x_1^2 + x_2^2)$; 9b) $[\hat{T}] = \begin{bmatrix} -p + 4\mu k x_1 & -4\mu k x_2 & 0 \\ -4\mu k x_2 & -p - 4\mu k x_1 & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$; c) $\mathbf{a} =$
 $2k^2(x_1^3 + 2x_1x_2^2, x_1^2x_2 + x_2^3, 0)$; d) $p = p_0 - 2\rho k^2 \left(\frac{x_1^4}{4} + \frac{x_2^4}{4} + \frac{x_1^2x_2^2}{2} \right)$; 11) $[\hat{T}] = \begin{bmatrix} -p & \mu \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \mu \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \mu \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & -p & 0 \\ \mu \frac{\partial v_1}{\partial x_3} & 0 & -p \end{bmatrix}$.