UNIVERSIDADE da MADEIRA

Mecânica dos Meios Contínuos

Série de exercícios 6 - Sólido Elástico Linear

Os exercícios assinalados com $\boxed{\text{www}}$ têm a resolução no sítio da cadeira na internet.

1. Considere o seguinte campo de deslocamento para um meio material que preenche o semi-espaço $X_2 \geq 0$:
$$u_1 = u_3 = 0; \quad u_2 = \phi \sin\left[\frac{2\pi}{l}(X_2 - ct)\right] + \beta \cos\left[\frac{2\pi}{l}(X_2 - ct)\right]$$
   (a) Caracterize o movimento das partículas do meio.
   (b) Verifique se se trata de um movimento de volume variável.
   (c) Determine ϕ, β, l se o campo de deslocamento aplicado no plano $X_2 = 0$ for dado por $\mathbf{u} = a\cos(\omega t)\,\mathbf{e}_2$.
   (d) Determine o valor de ϕ, β, l se o vector de tensão $\mathbf{t_n}$ no plano $X_2 = 0$ for $\mathbf{t_n} = d\sin(\omega t)\,\mathbf{e}_2$.
   (e) Determine em que condições são satisfeitas as equações do movimento, na ausência de forças de corpo.

2. Considere o seguinte campo de deslocamento para um meio material que preenche o semi-espaço $X_2 \geq 0$:
$$u_1 = u_2 = 0; \quad u_3 = \phi \sin[\beta(X_2 - ct)] + \alpha \cos[\beta(X_2 - ct)]$$
   (a) Caracterize o movimento das partículas do meio.
   (b) Verifique se se trata de um movimento de volume variável.
   (c) ✠ Determine ϕ, α, β se o campo de deslocamento no plano $X_2 = 0$ for dado por $\mathbf{u} = b\sin(\omega t)\,\mathbf{e}_3$.
   (d) ✠ Determine ϕ, α, β se o vector de tensão no plano $X_2 = 0$ for dado por $\mathbf{t_n} = d\sin(\omega t)\,\mathbf{e}_3$.

3. **Exemplo 3 T** Considere o campo de deslocamento
$$u_1 = u_3 = 0; \quad u_2 = \alpha \sin\frac{2\pi}{l}(X_1 - c_T t) + \beta \cos\frac{2\pi}{l}(X_1 - c_T t)$$
   no meio espaço $X_1 \geq 0$.
   (a) Determine α, β, l se o campo de deslocamento no plano $X_1 = 0$ for dado por $\mathbf{u} = b\sin(\omega t)\;\mathbf{e}_2$.
   (b) Determine α, β, l se o vector de tensão no plano $X_1 = 0$ for dado por $\mathbf{t_n} = d\sin(\omega t)\;\mathbf{e}_2$.

4. **Exemplo 4 T** Considere o campo de deslocamento
$$u_1 = u_2 = 0; \quad u_3 = \alpha \cos pX_2 \cos\frac{2\pi}{l}(X_1 - ct).$$
   (a) Mostre que este movimento é de volume constante.
   (b) Mediante as equações de movimento, exprima c em função de p, l, ρ_0, μ.
   (c) Este campo de deslocamento é utilizado para descrever uma onda localizada na região $|X_2| \leq h$. As tracções nos planos $X_2 = \pm h$ são nulas. Determine p.

5. $\boxed{\text{www}}$ Considere um meio elástico linear em que o campo de deslocamento é dado por

$$u_2 = u_3 = 0; \quad u_1 = \varepsilon \left\{ \sin\left[\beta\left(X_3 - ct\right)\right] + \alpha \sin\left[\beta\left(X_3 + ct\right)\right] \right\}$$

   (a) Caracterize o movimento das partículas do meio.
   (b) Determine em que condições são satisfeitas as equações do movimento, na ausência de forças de corpo.
   (c) Suponha que existe uma fronteira em $X_3 = 0$ que é livre de tensão. Sob que condições o movimento satisfaz esta condição fronteira para todo o instante?
   (d) Suponha que também existe uma fronteira em $X_3 = l$ que também é livre de tensão. Que condições adicionais terão de ser impostas a este movimento de maneira a que esta condição fronteira seja satisfeita em qualquer instante?

6. As mesmas perguntas que o exercício anterior, mas $\mathbf{u}$ é dado por

$$u_1 = u_2 = 0; \quad u_3 = \sin\left[\beta\left(X_3 - ct\right)\right] + \alpha \sin\left[\beta\left(X_3 + ct\right)\right]$$

7. Uma barra circular de aço ($E_Y = 207\,\mathrm{GPa}$ e $\nu = 0,3$) com $0,61\,\mathrm{m}$ de comprimento e $2,54\,\mathrm{cm}$ de raio é puxada nas extremidades por duas forças iguais axiais e opostas, de magnitude $P = 44,5\,\mathrm{kN}$. Determine:

   (a) as tensões normais e tangenciais máximas;
   (b) o alongamento total e a contracção do diâmetro.

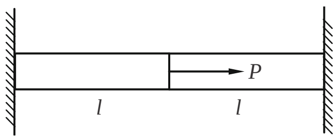
8. Uma barra de ferro fundido ($E_Y = 103\,\mathrm{GPa}$ e $\nu = 0,25$), com $122\,\mathrm{cm}$ de comprimento e $3,81\,\mathrm{cm}$ de diâmetro é puxada nos seus extremos por forças iguais axiais e opostas, de magnitude $P = 89\,\mathrm{kN}$. Determine

   (a) as tensões normais e tangenciais máximas;
   (b) o alongamento total e a contracção lateral.

9. Uma barra de aço ($E_Y = 207\,\mathrm{GPa}$) com $3,05\,\mathrm{m}$ de comprimento será desenhada para suportar uma força de $444,8\,\mathrm{kN}$ num dos seus extremos. Qual deverá ser a àrea mínima da secção recta:

   (a) se a tensão tangencial máxima não deverá exceder $103\,\mathrm{MPa}$ e a tensão normal máxima não deverá exceder $138\,\mathrm{MPa}$.
   (b) se para além das condições da alínea anterior também se requer que o alongamento não exceda $0,127\,\mathrm{cm}$?

10. **Exemplo 7 T** Uma barra é feita de duas substâncias. Uma força externa P está aplicada no plano de contacto de duas substâncias diferentes (ver figura). Determine as forças com as quais a barra actua sobre as paredes.



11. **Exemplo 8 T** Considere uma barra cilíndrica, com raio $a = 2\,\mathrm{mm}$, e comprimento $l = 1\,\mathrm{m}$. Uma extremidade da barra está presa, outra está torcida por meio de uma chave inglesa de comprimento $R = 50\,\mathrm{cm}$. A força aplicada à chave é $F = 10\,\mathrm{kgf}$. A barra é feita de aço, $E_y = 2 \times 10^{11}\,\mathrm{Pa}$, $\nu = 0.3$. Determine o ângulo de rotação da chave e o caminho percorrido pela sua extremidade.

Soluções:

1a) O movimento das partículas do meio resulta da propagação de uma onda plana longitudinal, direcção de propagação $\mathbf{e}_2$; b) $E_{kk} \neq 0$ trata-se de um movimento de volume variável; c) $\phi = 0; \beta = a; l = \frac{2\pi}{\omega}c$; d) $\phi = 0; \beta = -\frac{cd}{\omega(\lambda+2\mu)}; l = \frac{2\pi}{\omega}c$; e) $c = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}}$; 2a) O movimento das partículas do meio resulta da propagação de uma onda plana transversal, direcção de propagação $\mathbf{e}_2$; b) Trata-se de uma onda plana de volume constante pois $E_{kk} = 0$; c) $\phi = -b; \alpha = 0; \beta = \frac{\omega}{c}$; d) $\phi = 0; \alpha = -\frac{dc}{\mu\omega}; \beta = \frac{\omega}{c}$; 3a) $\alpha = -b, \quad \beta = 0, \quad l = \frac{2\pi c_T}{\omega}$; 3.b) $\alpha = 0$; $\beta = -\frac{dl}{2\pi\mu} = -\frac{c_T d}{\mu\omega}$; $l = \frac{2\pi c_T}{\omega}$; 4b) $c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}\sqrt{1 + \left(\frac{lp}{2\pi}\right)^2}$; 4c) $p = \frac{\pi n}{h}$; $n = 0, 1, 2, ...$; 5a) O movimento das partículas do meio resulta da propagação de duas ondas planas transversais, direcção de propagação $\mathbf{e}_3$; b) $c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}$; c) $\alpha = -1$; d) $\beta = \frac{k\pi}{l}$ com $k = 1, 2, 3, \ldots$; 6a) O movimento das partículas do meio resulta da propagação de duas ondas planas longitudinais, direcção de propagação $\mathbf{e}_3$; b) $c = \sqrt{\frac{(\lambda+2\mu)}{\rho_0}}$; c) $\alpha = -1$; d) $\beta = \frac{k\pi}{l}$ com $k = 1, 2, 3, \ldots$.; 7a) $(T_n)_{\max} = \frac{P}{A} = 22,0\,\mathrm{MPa}$; $(T_s)_{\max} = \frac{P}{2A} = 11,0\,\mathrm{MPa}$; 7b) $\Delta l \approx 65\,\mu\mathrm{m}$; $\Delta d \approx -1,62\,\mu\mathrm{m}$; 8a) $(T_n)_{\max} = 78\,\mathrm{MPa}$; $(T_s)_{\max} = 39\,\mathrm{MPa}$; 8b) $\Delta l \approx 9,25 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}$; $\Delta d \approx -7,22 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}$; 9a) $A \geq 3.22 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^2$; 9b) $A > 5,16 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^2$; 10) $P_2 = -\frac{E_y^{(2)}}{E_y^{(1)}+E_y^{(2)}}P, \quad P_1 = \frac{E_y^{(1)}}{E_y^{(1)}+E_y^{(2)}}P$; 11) $\theta(l) = 25.36\,\mathrm{rad}, d = 12.7\,\mathrm{m}$.