5 $\boxed{\text{www}}$ Considere um meio elástico linear em que o campo de deslocamento é dado por

$$u_2 = u_3 = 0; \quad u_1 = \varepsilon \left\{ \sin\left[\beta\left(X_3 - ct\right)\right] + \alpha \sin\left[\beta\left(X_3 + ct\right)\right] \right\}$$

(a) Caracterize o movimento das partículas do meio.

(b) Determine em que condições são satisfeitas as equações do movimento, na ausência de forças de corpo.

(c) Suponha que existe uma fronteira em $X_3 = 0$ que é livre de tensão. Sob que condições o movimento satisfaz esta condição fronteira para todo o instante?

(d) Suponha que também existe uma fronteira em $X_3 = l$ que também é livre de tensão. Que condições adicionais terão de ser impostas a este movimento de maneira a que esta condição fronteira seja satisfeita em qualquer instante?

$\boxed{\text{Solução:}}$ a) Este campo de deslocamento resulta da sobreposição de duas ondas planas, transversais (a direcção de vibração (u_1) é perpendicular à direcção de propagação (X_3)), progressivas (porque não são estacionárias ou seja têm um termo de propagação ct) que se propagam com direcção de propagação segundo $\mathbf{e}_3$.

b) A eq. do movimento de Cauchy no caso de deslocamentos infinitesimais escreve-se: $\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \rho_0 B_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial X_j}$

Temos então no caso de forças de corpo nulas: $\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{11}}{\partial X_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial X_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial X_3} \\ \rho_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{21}}{\partial X_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial X_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial X_3} \\ \rho_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{31}}{\partial X_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial X_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial X_3} \end{cases}$

Uma vez que $u_2 = 0$ e $u_3 = 0$ ficamos com $\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{11}}{\partial X_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial X_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial X_3} \\ 0 = \frac{\partial T_{21}}{\partial X_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial X_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial X_3} \\ 0 = \frac{\partial T_{31}}{\partial X_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial X_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial X_3} \end{cases}$

Vamos agora utilizar a lei de Hooke: $T_{ij} = \lambda \underbrace{E_{kk}}_{e} \delta_{ij} + 2\mu E_{ij}$

Vamos começar por E_{kk}:

$E_{11} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right) = 0$

$E_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial X_2} = 0$

$E_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial X_3} = 0$

$T_{ij} = \lambda\left(0\right)\delta_{ij} + 2\mu E_{ij} = 2\mu E_{ij}$

$$\begin{array}{ccc} T_{11} = 0 & T_{12} = 0 & T_{13} = 2\mu E_{13} = 2\mu\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right)\right) \\ T_{21} = 0 & T_{22} = 0 & T_{23} = 0 \\ T_{31} = 2\mu E_{31} = 2\mu\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_3}\right)\right) & T_{32} = 0 & T_{33} = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} T_{11} = 0 & T_{12} = 0 & T_{13} = \mu \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ T_{21} = 0 & T_{22} = 0 & T_{23} = 0 \\ T_{31} = \mu \frac{\partial u_1}{\partial X_3} & T_{32} = 0 & T_{33} = 0 \end{array}$$

$\frac{\partial u_1}{\partial X_3} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_3}\left\{\sin\left[\beta\left(X_3 - ct\right)\right] + \alpha \sin\left[\beta\left(X_3 + ct\right)\right]\right\} = \varepsilon\beta\left\{\cos\left[\beta\left(X_3 - ct\right)\right] + \alpha\cos\left[\beta\left(X_3 + ct\right)\right]\right\}$

$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left\{\sin\left[\beta\left(X_3 - ct\right)\right] + \alpha \sin\left[\beta\left(X_3 + ct\right)\right]\right\} = \varepsilon\beta c\left\{-\cos\left[\beta\left(X_3 - ct\right)\right] + \alpha\cos\left[\beta\left(X_3 + ct\right)\right]\right\}$

$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \varepsilon\beta c \frac{\partial}{\partial t}\left\{-\cos\left[\beta\left(X_3 - ct\right)\right] + \alpha\cos\left[\beta\left(X_3 + ct\right)\right]\right\} = \varepsilon\beta^2 c^2\left\{-\sin\left[\beta\left(X_3 - ct\right)\right] - \alpha\sin\left[\beta\left(X_3 + ct\right)\right]\right\}$

ficamos com $\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{13}}{\partial X_3} = \frac{\partial}{\partial X_3}\left(\mu \frac{\partial u_1}{\partial X_3}\right) = \mu\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial X_3^2}\right) \\ 0 = 0 \\ 0 = \frac{\partial T_{31}}{\partial X_1} = 0 \end{cases}$

$\rho_0\left(\varepsilon\beta^2c^2\left\{-\sin\left[\beta\left(X_3-ct\right)\right]-\alpha\sin\left[\beta\left(X_3+ct\right)\right]\right\}\right)=\mu\frac{\partial}{\partial X_3}\left(\varepsilon\beta\left\{\cos\left[\beta\left(X_3-ct\right)\right]+\alpha\cos\left[\beta\left(X_3+ct\right)\right]\right\}\right)$
$\rho_0\left(\varepsilon\beta^2c^2\left\{-\sin\left[\beta\left(X_3-ct\right)\right]-\alpha\sin\left[\beta\left(X_3+ct\right)\right]\right\}\right)=\mu\left(\varepsilon\beta^2\left\{-\sin\left[\beta\left(X_3-ct\right)\right]-\alpha\sin\left[\beta\left(X_3+ct\right)\right]\right\}\right)$
$\rho_0\left(c^2\left\{-\sin\left[\beta\left(X_3-ct\right)\right]-\alpha\sin\left[\beta\left(X_3+ct\right)\right]\right\}\right)=\mu\left(\left\{-\sin\left[\beta\left(X_3-ct\right)\right]-\alpha\sin\left[\beta\left(X_3+ct\right)\right]\right\}\right)$
$\rho_0c^2=\mu$
$c=+\sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}$ (o sinal é positivo por convenção)
c) $\mathbf{t_n}=(0,0,0)$
$\mathbf{n_{e_3}}=(0,0,1)$
$\widehat{T}\mathbf{n}=\begin{bmatrix}T_{13}\\T_{23}\\T_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$
$T_{13}=T_{31}=\mu\frac{\partial u_1}{\partial X_3}=\mu\varepsilon\beta\left\{\cos\left[\beta\left(X_3-ct\right)\right]+\alpha\cos\left[\beta\left(X_3+ct\right)\right]\right\}$
$T_{23}=T_{32}=0$
$T_{33}=0$
Como $\begin{bmatrix}T_{13}\\T_{23}\\T_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$
Retiramos que: $T_{13}=\mu\varepsilon\beta\left\{\cos\left[\beta\left(X_3-ct\right)\right]+\alpha\cos\left[\beta\left(X_3+ct\right)\right]\right\}=0$
Ora isto significa que $\cos\left[\beta\left(X_3-ct\right)\right]+\alpha\cos\left[\beta\left(X_3+ct\right)\right]=0$
$\cos\left[\beta\left(X_3-ct\right)\right]=-\alpha\cos\left[\beta\left(X_3+ct\right)\right]$
Para $X_3=0$ ficamos com $\cos\left(-\beta ct\right)=-\alpha\cos\left(\beta ct\right)$
Mas como $\cos\left(\alpha\right)=\cos\left(-\alpha\right)$
Ficamos com $\alpha=-1$.

d) $\cos\left[\beta\left(X_3-ct\right)\right]=-\alpha\cos\left[\beta\left(X_3+ct\right)\right]$
Para $X_3=l$ ficamos com $\cos\left[\beta\left(l-ct\right)\right]=-\alpha\cos\left[\beta\left(l+ct\right)\right]$
Já sabemos que $\alpha=-1$
Ficamos com $\cos\left(\beta l-\beta ct\right)=\cos\left(\beta l+\beta ct\right)$
Queremos eliminar a dependência do tempo, para isso usamos $\cos\left[\beta\left(l+ct\right)\right]=\cos\left[-\beta\left(l+ct\right)\right]$
Ficamos com $\cos\left(\beta l-\beta ct\right)=\cos\left(-\beta l-\beta ct\right)$
$\beta l-\beta ct=-\beta l-\beta ct+2k\pi$
$2\beta l=2k\pi$
$\beta=\frac{k\pi}{l};\ \ k=1,2,3,...$ (Nota: 0 não pode ser pois nesse caso $\beta=0$ e não haveria deslocamento!)