

# Modelização das camadas junto aos eléctrodos em descargas de arco de alta pressão

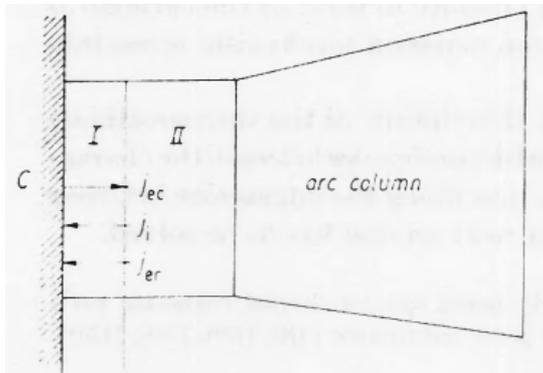
Nelson Almeida



# Motivação

- As camadas junto aos eléctrodos representam um objecto extremamente difícil para investigação experimental (temperaturas altas, espessuras baixas).
- Apesar de muitas décadas de investigação intensa, ainda não existe um entendimento universalmente aceite da física envolvida, nem existem modelos de simulação universalmente empregues.

Exemplo: A camada junto ao eléctrodo é dividida *a priori* em sub-camadas [1]



C: superfície do cátodo

I: bainha de carga de espaço

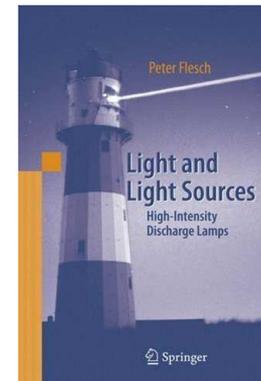
II: camada de ionização

$j_{ec}$ : densidade de corrente de emissão de electrões

$j_{ic}$ : densidade de corrente de iões para o cátodo

$j_{er}$ : densidade de corrente de retrodifusão de electrões

Exemplo: a separação de cargas (o efeito dominante!) é desprezada [2]



- É necessário efectuar uma modelização directa das camadas junto aos eléctrodos sem divisões *a priori*.
- Esta modelização irá permitir descrever tanto as camadas junto ao cátodo como as camadas junto ao ânodo.

[1] Neumann W [1987]. The Mechanism of the Thermoemitting Arc Cathode, Akademie-Verlag, Berlin.

[2] Flesch P [2006]. Light and Light Sources: High-Intensity Discharge Lamps, Springer.

Cap. 1. – Introdução

Cap. 2. – Camadas catódicas

Cap. 3. – Modelo multifluido

Cap. 4. – Camadas anódicas

Cap. 5. – Conclusões

Apêndices

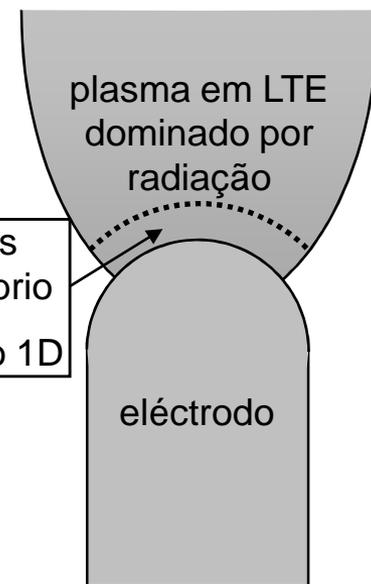


## Equações de conservação das espécies

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_\alpha = \omega_\alpha \quad \omega_i = \omega_e = -\omega_a = k_i n_a n_e - k_r n_i n_e^2 \quad \alpha = e, i, a$$

## Equações de transporte (Stefan-Maxwell)

domínio dos cálculos  
camada de não equilíbrio  
camada fina => cálculo 1D



$$-\underbrace{\nabla p_\alpha}_{\text{gradiente de pressão}} + \underbrace{n_\alpha e Z_\alpha \mathbf{E}}_{\text{força de corpo do campo eléctrico}} - \underbrace{\sum_\beta \frac{n_\alpha n_\beta k T_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta}}{n D_{\alpha\beta}} (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta)}_{\text{atrito entre espécies}} - \underbrace{\mathbf{R}_\alpha^T}_{\text{difusão térmica}} = 0$$

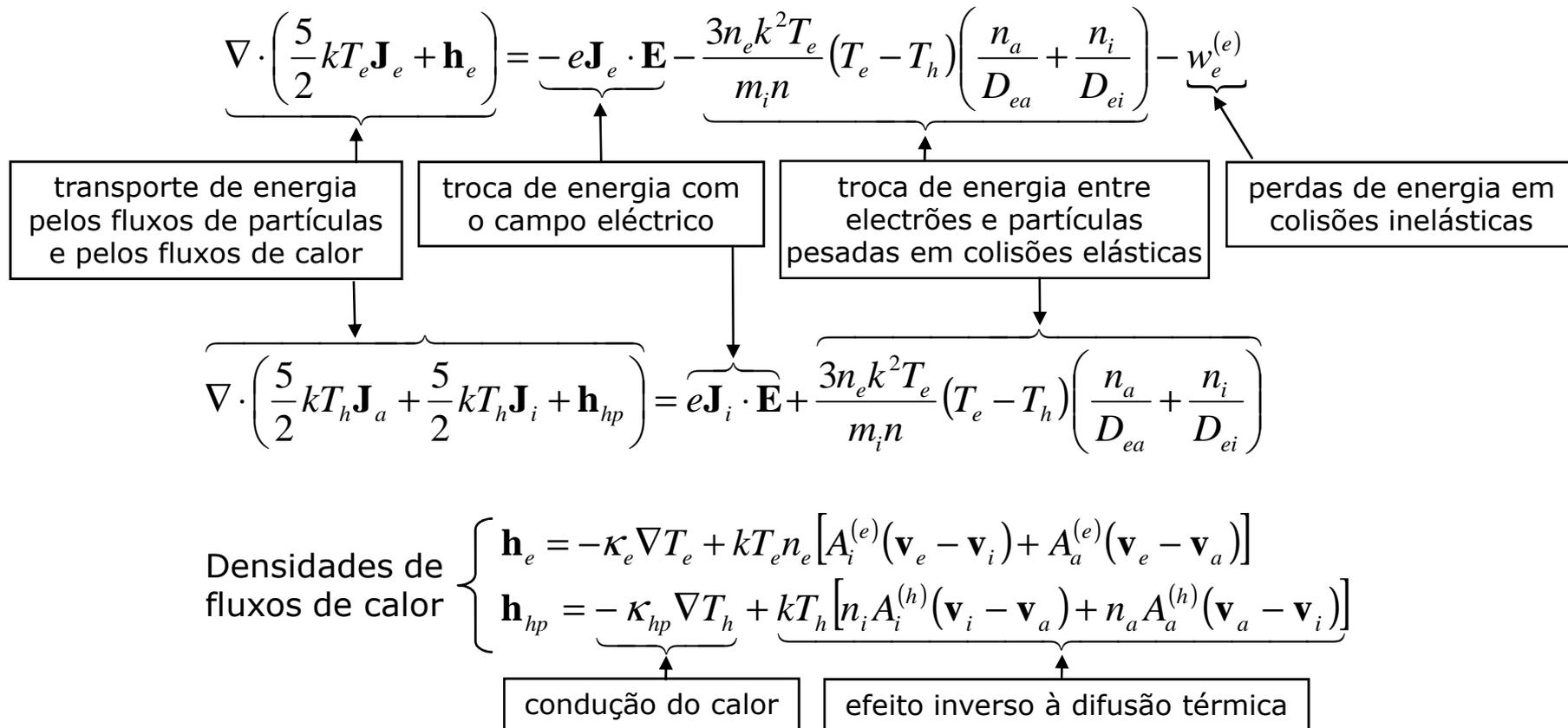
$$T_{ea} = T_{ei} = T_e, \quad T_{ia} = T_h, \quad D_{\alpha\beta} = \frac{3\pi}{32} \left( \frac{8kT_{\alpha\beta}}{\pi m_{\alpha\beta}} \right)^{1/2} \frac{1}{n \overline{Q_{\alpha\beta}^{(1,1)}}}$$

## Lei de Dalton

$$p = n_i k T_h + n_a k T_h + n_e k T_e$$



## Equação de energia dos electrões e das partículas pesadas



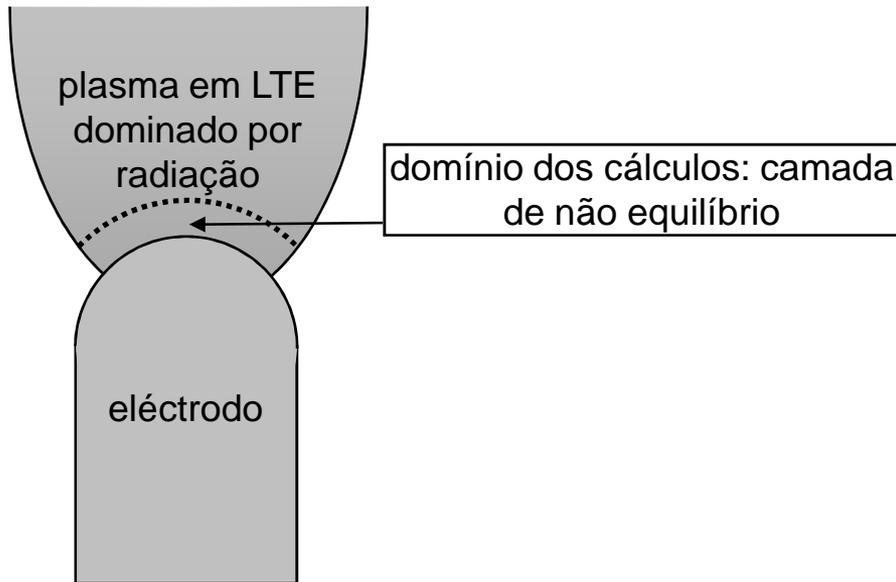
## Equação de Poisson

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = e(n_i - n_e)$$

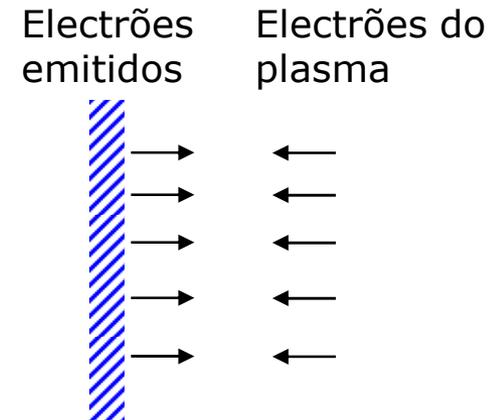
## Equação de hidrostática

$$-\nabla p + e(n_i - n_e) \mathbf{E} = 0$$





## Na superfície do eléctrodo



$$\frac{j_{em}}{e} - \frac{n_e C_e}{4} = J_e$$

$$\frac{j_{em}}{e} 2kT_w - \frac{n_e C_e}{4} 2kT_e = J_e \frac{5}{2} kT_e + h_e$$

$$n_i = 0 \quad T_h = T_w$$

## Na região do plasma em LTE dominado por radiação

$$n_i = n_e \quad T_e = T_h$$

$$k_i n_a - k_r n_i n_e = 0 \quad jE = w_{rad}$$

$$n_\alpha e Z_\alpha E - \sum_\beta \frac{n_\alpha n_\beta k T_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta}}{n D_{\alpha\beta}} (v_\alpha - v_\beta) = 0 \quad (\alpha = i, e)$$

$j_{em}$ : emissão termiônica, a emissão secundária de electrões é desprezável



## Método iterativo de resolução:

- Linearizar o problema.
- Resolver o problema linearizado várias vezes até que se atinja convergência.

## Dificuldades fundamentais:

- O acoplamento entre as diferentes equações é muito forte => é necessário resolver em cada iteração todas as equações simultaneamente (e não de uma maneira sequencial).
- As equações são fortemente não-lineares => abafador.
- Diferentes escalas espaciais => rede com passo variável e bem escolhida.
- A equação de Poisson não é adequada para a resolução numérica => foi deduzida uma equação onde  $E$  aparece num termo que não é pequeno fora da bainha.

$$\left[ \frac{\varepsilon_0 k T_h}{Be} (BE)' - \frac{\varepsilon_0}{B^2} \frac{(BE)^2}{2} + n_e k T_h \right]' = \frac{2\varepsilon_0 E^2}{r_c \sqrt{B}} - (C_i^{(h)} k T_h' + C_i^{(e)} k T_e') \frac{\varepsilon_0}{Be} (BE)'$$
$$+ \left[ R_{ia} \frac{\varepsilon_0}{Be} (BE)' - n_e (X_1 R_{ea} - R_{ia} - X_2 R_{ei}) + n_a R_{ia} \right] \left( -\frac{j}{e} \right) + X_1 k T_e n_e' + \boxed{X_2 n_e e E}$$
$$+ X_1 \tilde{C}_e^{(e)} n_e k T_e' - (C_i^{(h)} k T_h' + C_i^{(e)} k T_e') n_e$$



## Dificuldades técnicas:

- Linearização deve ser feita em ordem a todas as incógnitas e é por isso bastante envolvente.
- Muitos coeficientes => muitas subrotinas => estrutura do programa é bastante complexa.

Em cada iteração todas as equações foram resolvidas conjuntamente usando o método de Petukhov.

## Método de Petukhov

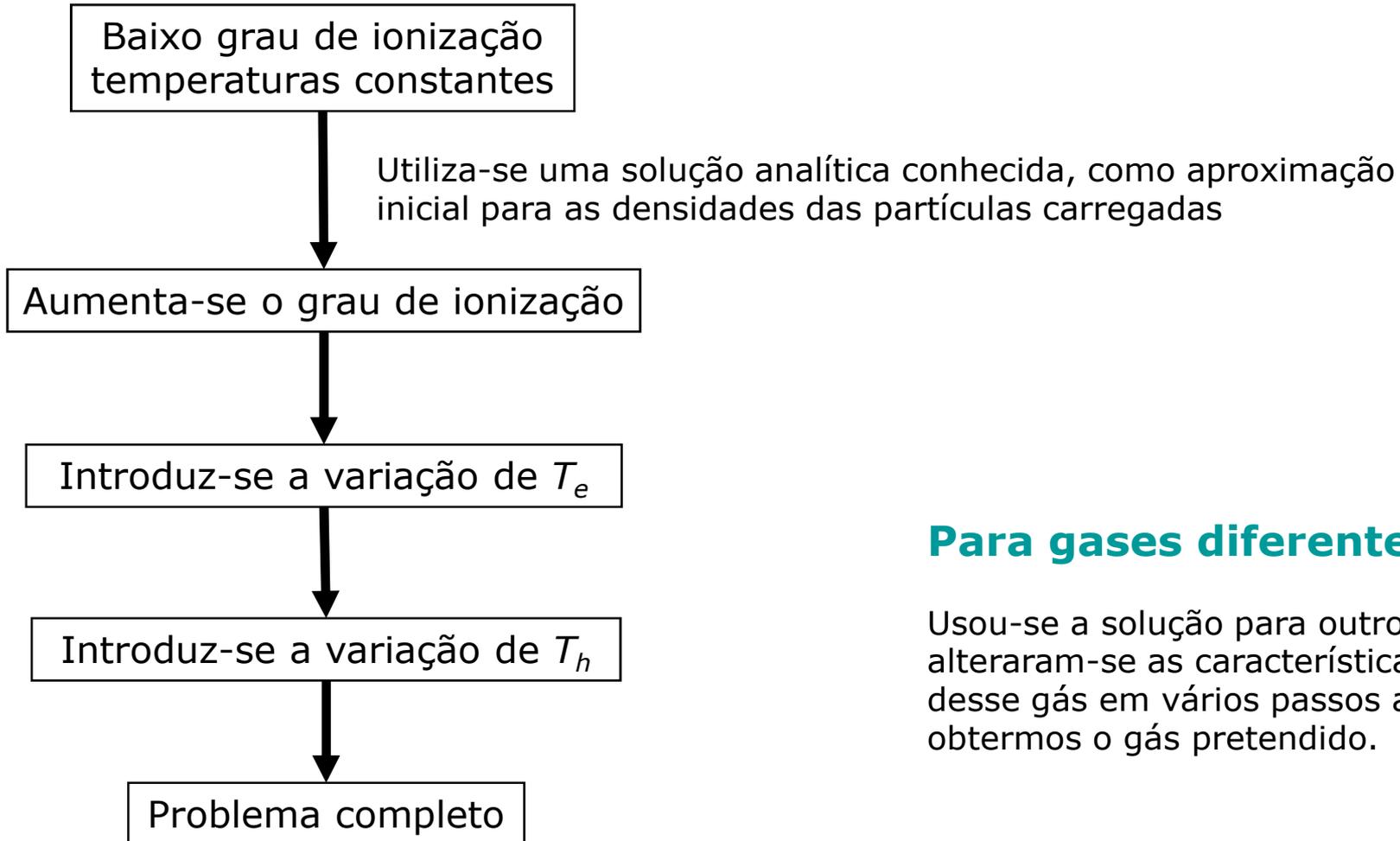
- Uma generalização do método de Petukhov original permite resolver sistemas de equações diferenciais lineares de 3ª ordem com condições fronteira.

## Vantagens do método

- Permite trabalhar com as equações na forma de divergência.
- É de 4ª ordem de aproximação.
- O coeficiente numérico do termo do erro é bastante reduzido.
- Permite que o passo da rede numérica seja variável sem perder a ordem de aproximação.



## Para a primeira solução



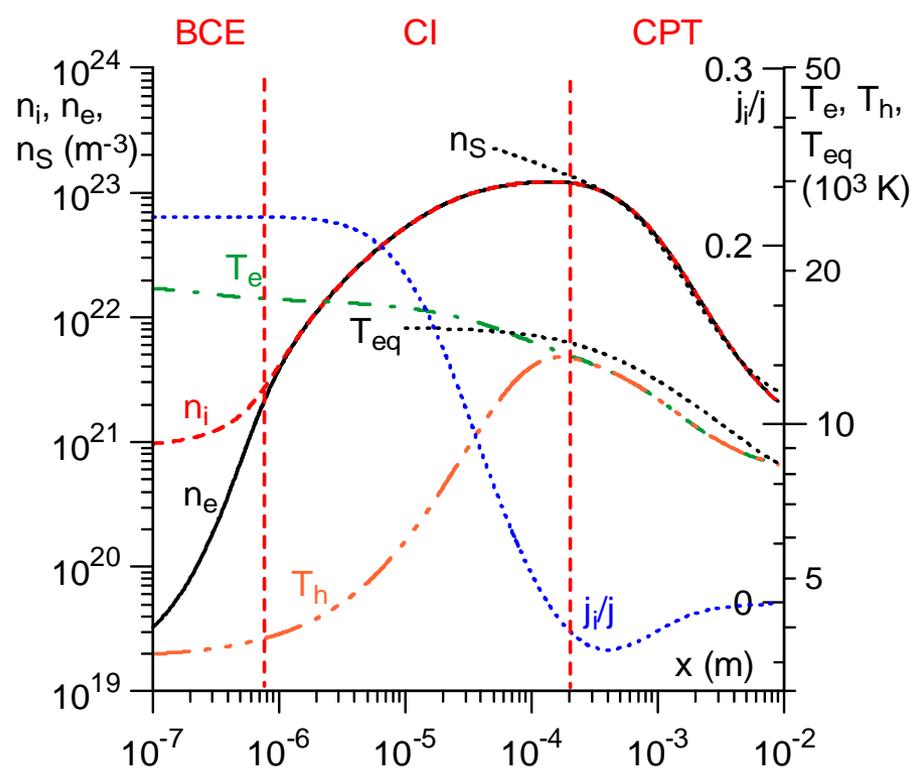
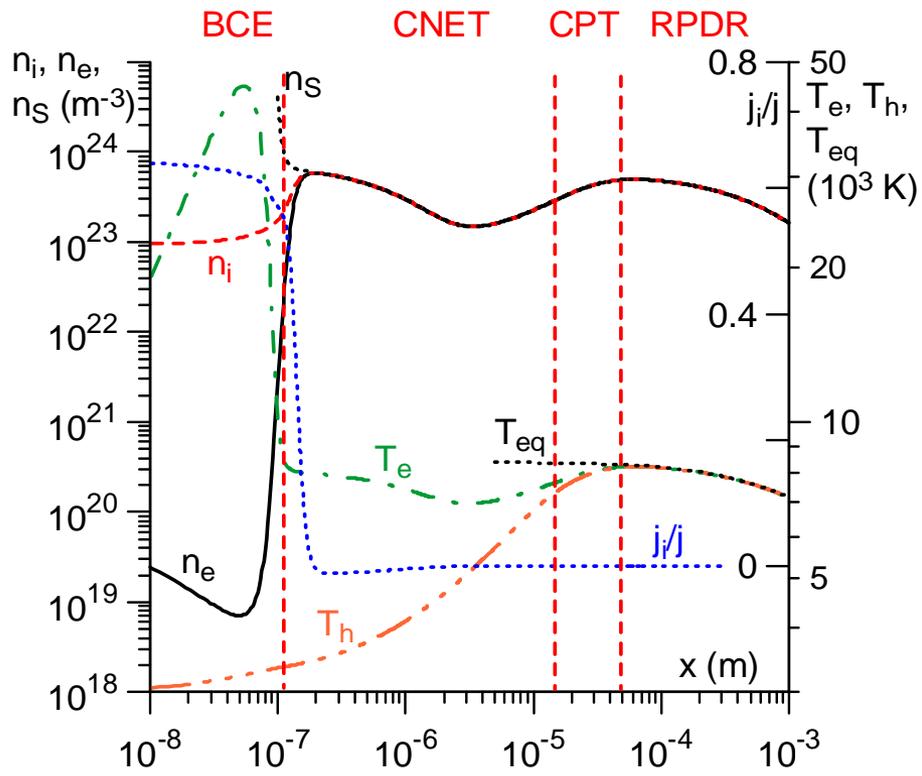
## Para gases diferentes

Usou-se a solução para outro gás e alteraram-se as características desse gás em vários passos até obtermos o gás pretendido.



- Plasma: Ar, 1 bar (exemplo padrão de arcos de alta pressão)  
Hg, 100 bar (condições típicas nas lâmpadas UHP)
- Eléctrodo: W
- $j_c = 10^6 - 10^8 \text{ A m}^{-2}$
- $T_w = 3000 - 4000 \text{ K}$





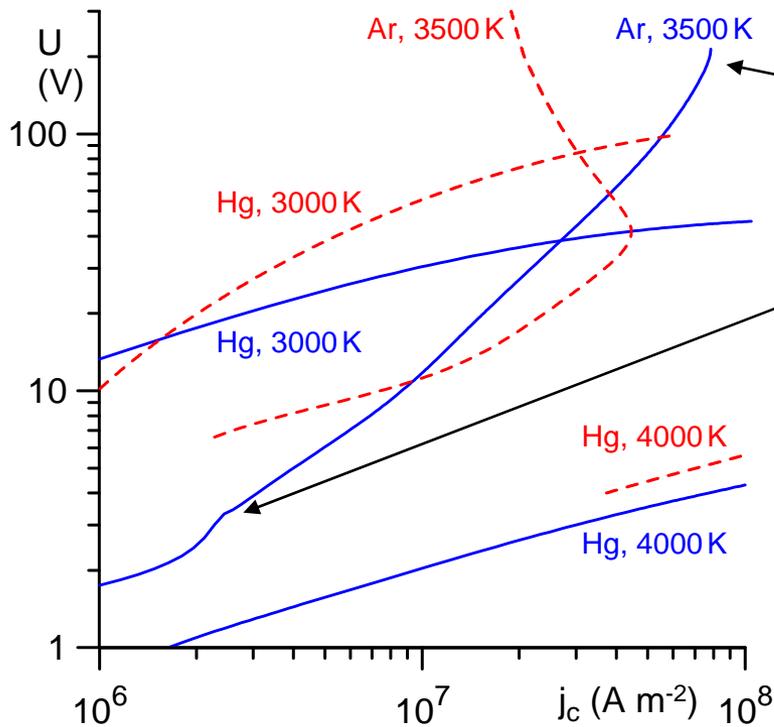
Hg, 100 bar,  $T_w = 3000$  K,  $j_c = 10^7$  A m<sup>-2</sup>

Ar, 1 bar,  $T_w = 3500$  K,  $j_c = 10^7$  A m<sup>-2</sup>

- BCE:** bainha de carga de espaço
- CI:** camada de ionização
- CNET:** camada de não equilíbrio térmico
- CPT:** camada de perturbação térmica
- RPDR:** região do plasma LTE dominado por radiação

- As camadas aparecem nos resultados da modelização de uma forma natural
- Vê-se que  $T_e$  pode atingir valores bastante altos na camada junto ao cátodo.





Características tensão-corrente da camada junto ao cátodo para um valor fixo de  $T_w$

— : o modelo presente

- - - : o modelo [3,4,5]

## Modelo presente

- a característica tensão-corrente aproxima-se da saturação.
- mudança de sinal de  $E$  na superfície do cátodo.
- Todas as características tensão-corrente são crescentes de forma monótona.

## Modelo [3,4,5]

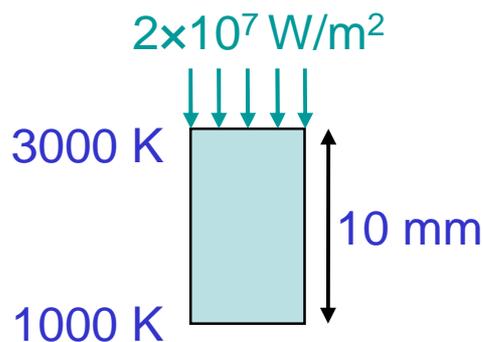
- deixa de funcionar se  $U$  for demasiado baixa
- dependência  $j_c(U)$  para Ar é não monótona (modelo multifluido)

[3] Benilov M S & Marotta A [1995]. J. Phys. D: Appl. Phys. **28**(9), 1869-1882.

[4] Benilov M S & Cunha M D [2002]. J. Phys. D: Appl. Phys. **35**(14), 1736-1750.

[5] Benilov M S & Cunha M D [2003]. Phys. Rev. E **68**(5), 56407.

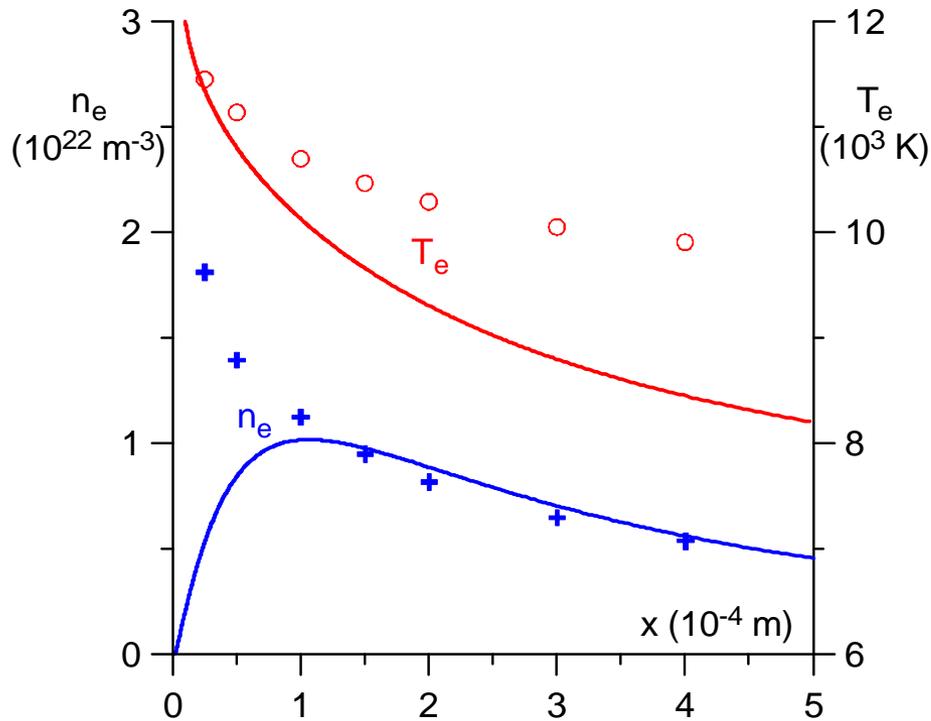
Gas	$T_w$ ( $10^3$ K)	$j_c$ ( $A\ m^{-2}$ )	$j_{iw} / j_c$	$j_{em} / j_c$	$T_e^{(max)}$ ( $10^3$ K)	$q_c$ ( $W\ m^{-2}$ )	Interesse prático
Hg	3	$10^6$	0.375	1.313	16.9	$1.25 \times 10^7$	S
Hg	3	$10^7$	0.640	0.491	45.0	$2.32 \times 10^8$	S
Hg	3	$10^8$	0.762	0.281	74.1	$3.55 \times 10^9$	S
Hg	4	$10^6$	0.004	46.43	–	$9.22 \times 10^5$	N
Hg	4	$10^7$	0.024	7.716	–	$-1.18 \times 10^7$	N
Hg	4	$10^8$	0.160	2.032	–	$-1.07 \times 10^8$	N
Ar	3.5	$10^6$	$4 \times 10^{-4}$	4.898	–	$-3.67 \times 10^6$	N
Ar	3.5	$10^7$	0.216	0.824	18.5	$4.14 \times 10^7$	S
Ar	3.5	$7.8 \times 10^7$	0.760	0.242	430	$1.29 \times 10^{10}$	S



Das 9 variantes, apenas 5 são de interesse prático.

Nessas 5 variantes { -  $T_e$  possui um máximo bem pronunciado.  
 - Existe uma fracção apreciável de corrente iónica.





Ar,  $p = 2.6$  bar

— :  $T_w = 3000$  K,  $j_c = 4.14 \times 10^5$  A m<sup>-2</sup>

o, + : experiências [6]

- A discrepância entre os valores teóricos de  $T_e$  e os valores experimentais é cerca de 20%.
- A discrepância para  $n_e$  atinge um factor de cerca de 3.
- A função calculada  $n_e$  atinge um valor máximo em  $x \approx 100$   $\mu$ m o que não é observado na experiência.

Este máximo pode estar ligado aos efeitos cinéticos desprezados no modelo.

## Equações de conservação dos iões e dos núcleos

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_i = k_i n_i n_a, \quad n_i \mathbf{v}_i + n_a \mathbf{v}_a = 0$$

## Equações de Stefan-Maxwell com termos multifluido adicionados

$$-\underbrace{\nabla p_\alpha}_{\text{gradiente de pressão}} + \underbrace{n_\alpha e Z_\alpha \mathbf{E}}_{\text{força de corpo do campo eléctrico}} - \underbrace{\sum_\beta \frac{n_\alpha n_\beta k T_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta}}{n D_{\alpha\beta}} (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta)}_{\text{atrito entre espécies}} + \mathbf{S}_\alpha = \nabla \cdot (\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha \mathbf{v}_\alpha)$$

**Termos adicionais:**

$$S_\alpha = \begin{cases} S_i = \omega_i m_i v_a = k_i n_a n_e m_i v_a \\ S_e \ll S_i \\ S_a \approx -S_i \approx -k_i n_a n_e m_i v_a \end{cases}$$

← taxa média de variação de momento linear das espécies por unidade de volume devido à ionização

$$\nabla \cdot (\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha \mathbf{v}_\alpha)$$

← termo inercial



## Condições fronteira

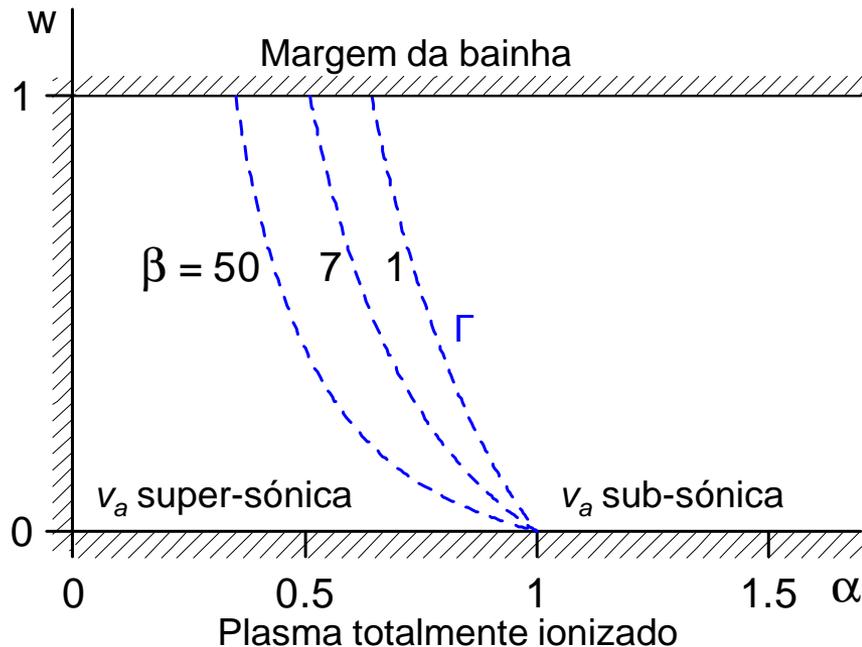
na margem da bainha de carga de espaço: critério de Bohm

no lado do plasma da camada de ionização:

$$v_i = -v_s \equiv -\left[ \frac{k(T_h + T_e)}{m_i} \right]^{1/2}$$

$$n_i \rightarrow n_{i\infty} \equiv \frac{p}{k(T_h + T_e)}$$

## Região de troca ramos

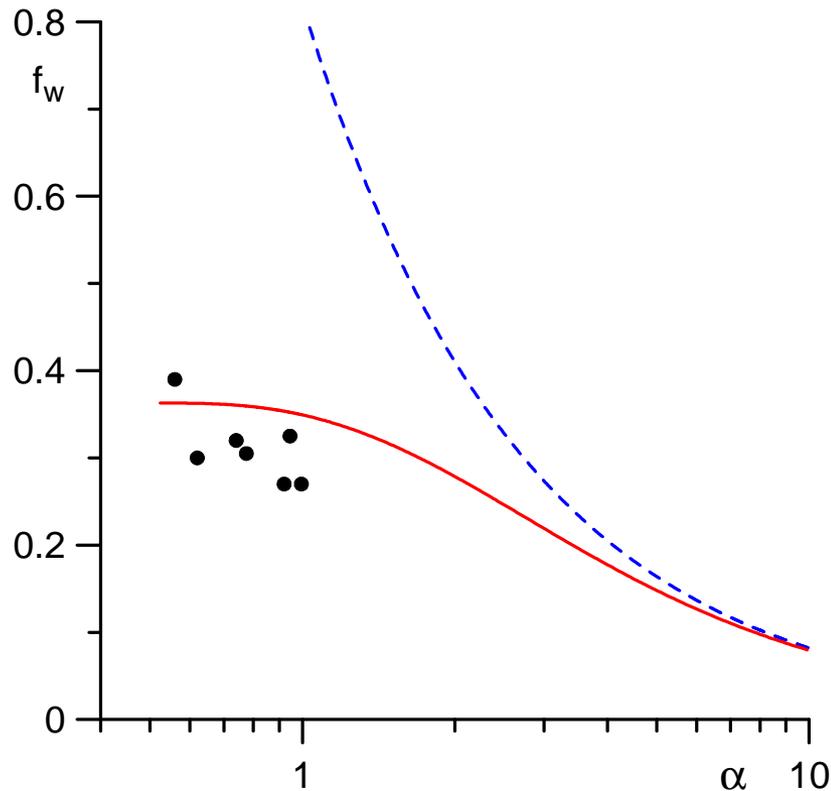


$$w = -\frac{v_i}{v_s}, \quad \alpha = \left( \frac{kT_h}{m_i k_i n D_{ia}} \right)^{1/2}$$

$$\beta = \frac{T_e}{T_h}$$

$\Gamma$  pode ser considerada como a linha de Mach, i.e., uma fronteira que divide a faixa ( $0 < \alpha < \infty$ ,  $0 \leq w \leq 1$ ) em partes nas quais o escoamento dos átomos dentro da camada de ionização é sub- ou super-sônico.





$$f = \frac{n_i}{n_{i\infty}} \quad f_w = f|_{w=1} = f_w(\alpha, \beta)$$

fluxo de iões para a superfície

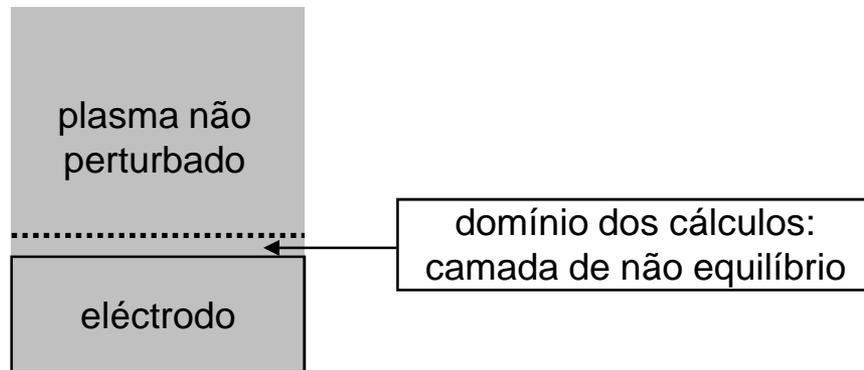
$$J_i = n_{i\infty} v_s f_w$$

Fluxo de iões adimensional da camada de ionização,  $\beta=6$

- : modelo presente
- - - : solução de difusão
- : dados experimentais [7]

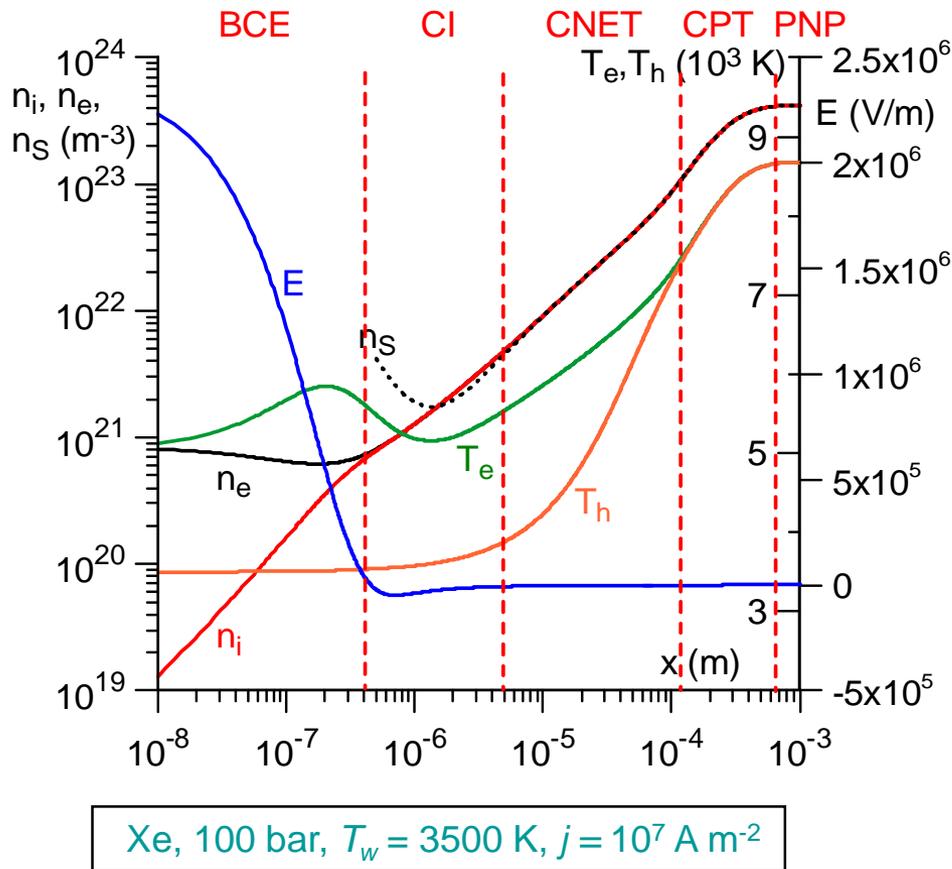
Enquanto que os valores obtidos pela teoria de difusão são consideravelmente maiores do que os valores experimentais, a teoria do modelo multifluido apresenta um acordo razoável com a experiência.

[7] Baksht F G, et al. [1973]. Sov. Phys. Tech. Phys. **18**(12), 1617-1622.



- Plasma: Xe, Hg
- $p = 50, 100, 200$  bar
- Eléctrodo: W
- $j_c = 10^7 - 10^8$  A m<sup>-2</sup>
- $T_w = 2000 - 3500$  K

Mesmo código que no caso do cátodo  
Basta alterar o sinal de  $j$



Em contraste com o cátodo:

- Existe uma região de plasma não perturbado com parâmetros constantes.
- Os valores de  $T_e$  são bastante menores do que no caso do cátodo.

**BCE:** bainha de carga de espaço

**CI:** camada de ionização

**CNET:** camada de não equilíbrio térmico

**CPT:** camada de perturbação térmica

**PNP:** plasma não perturbado



$T_w$ (K)	$j$ (A m <sup>-2</sup> )	$p_0$ (bar)	$T_{ew}$ (K)	$U$ (V)	$U_h$ (V)
2500	10 <sup>7</sup>	100	4947	- 1.02	5.74
3000	10 <sup>7</sup>	100	5104	- 1.02	5.73
3500	10 <sup>7</sup>	100	5042	- 0.96	5.80
2500	10 <sup>8</sup>	100	5363	- 2.95	5.60
3000	10 <sup>8</sup>	100	5571	- 2.94	5.62
3500	10 <sup>8</sup>	100	5735	- 2.91	5.65
3000	10 <sup>7</sup>	50	5377	- 1.46	5.69
3000	10 <sup>7</sup>	200	4817	- 0.63	5.82

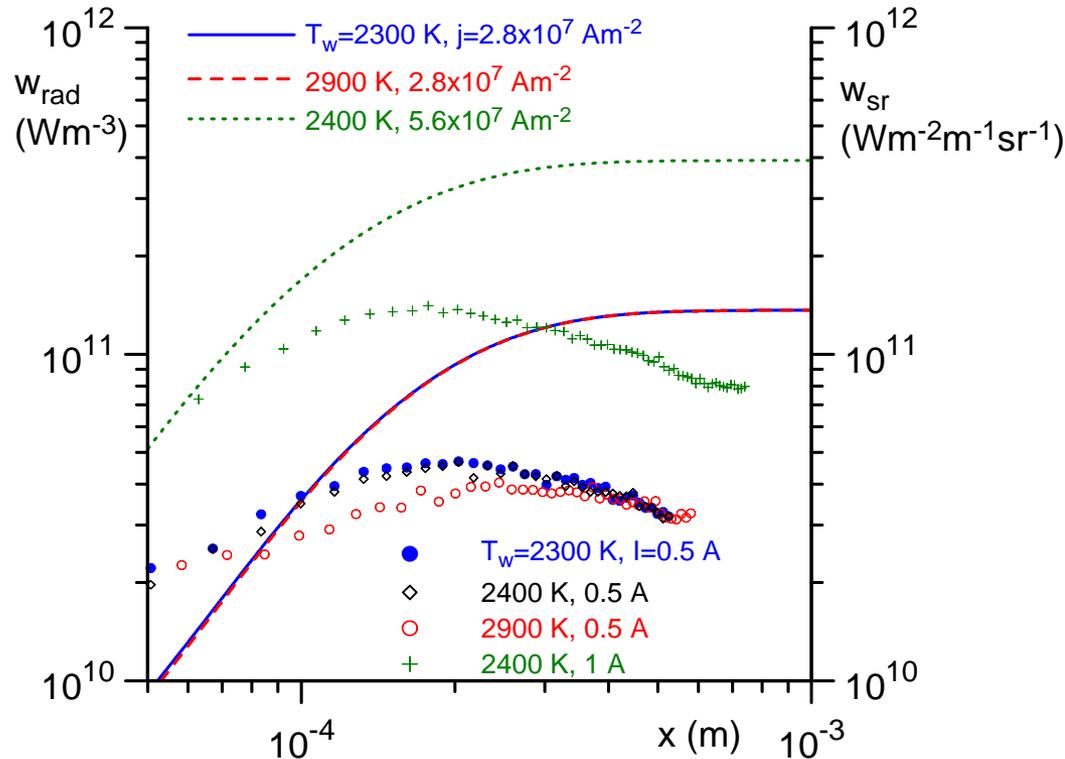
Xe

tensão de aquecimento do ânodo

$$U_h = \frac{q_w}{j}$$

- O acoplamento da temperatura dos electrões na vizinhança da superfície do ânodo às condições de operação é bastante fraco, em contraste com o que acontece no cátodo.
- A característica tensão-corrente da camada de não equilíbrio junto ao ânodo decrescente, em contraste com a característica da camada junto ao cátodo, que é crescente.
- A tensão de aquecimento do ânodo  $U_h$ :  
 é virtualmente independente de  $T_w$   
 decresce fracamente com o aumento de  $j$   
 aumenta fracamente com o aumento de  $p_0$ .
- Experiências realizadas numa lâmpada com Xe com  $p = 100$  bar revelam um bom acordo entre a modelização e as experiências:  $U_{h\ mod} = 5.6 - 5.8$  V,  $U_{h\ exp} = 5.5 - 6$  V.



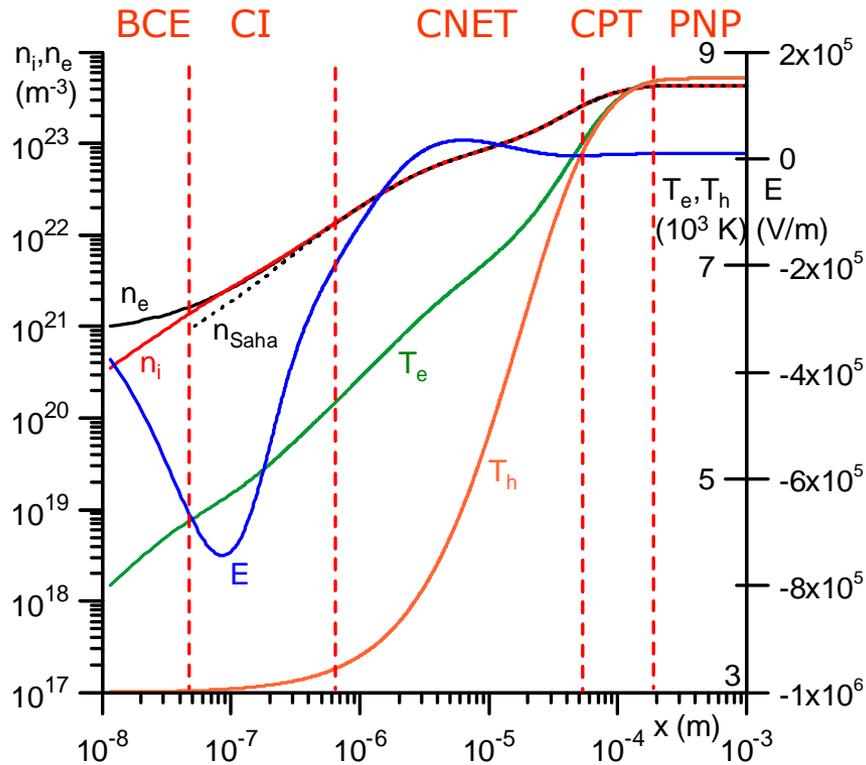


- O efeito da temperatura do ânodo sobre a emissão de radiação é fraco.
- Uma mudança da corrente total na experiência significa realmente uma mudança da densidade de corrente no ânodo, e não tanto da área de ligação do arco ao ânodo, porque a radiância neste último caso não mudaria assim tanto.

Camada junto ao ânodo, Xe, 100 bar  
Pontos: medições da radiância numa lâmpada  
Linhas: cálculos das perdas de potência por radiação

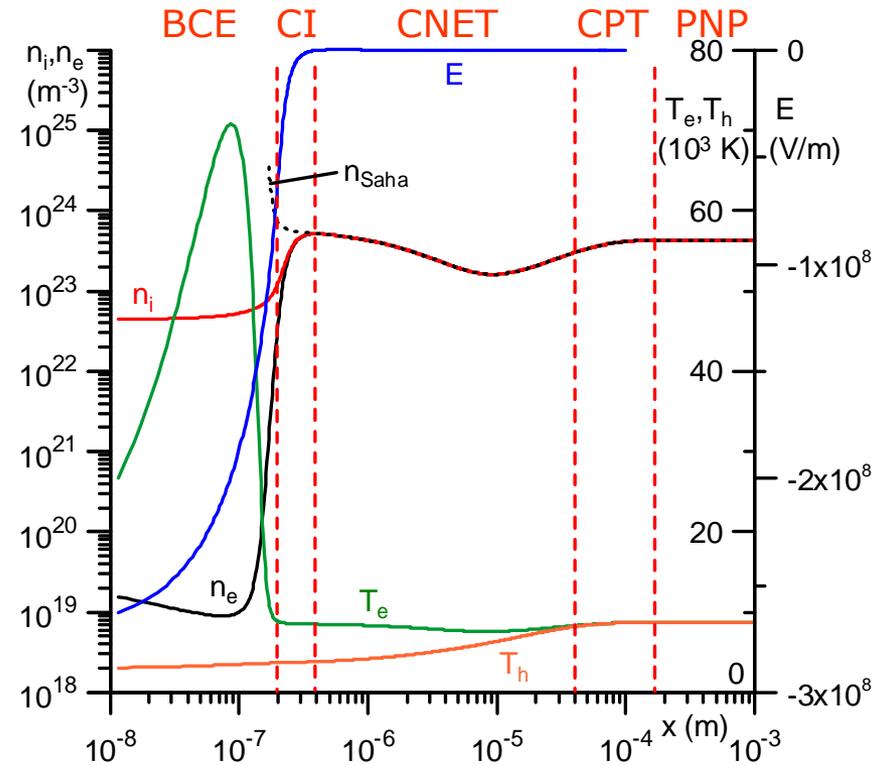


# Conclusões: Comparação ânodo-cátodo



Ânodo

Hg, 30 bar,  $T_w = 3000$  K,  $j = 10^7$  A  $m^{-2}$



Cátodo

- Foi possível modelizar de uma forma directa as camadas junto aos eléctrodos.
- Foi possível comparar directamente a estrutura das camadas junto ao cátodo com a estrutura das camadas junto ao ânodo.



- Principal semelhança: a estrutura das camadas.
- Principais diferenças:
  - o papel da bainha de carga de espaço (passiva no caso do ânodo).
  - a contribuição principal para o aquecimento do ânodo é dada pela potência transportada pela corrente dos electrões do plasma não perturbado para a camada junto ao ânodo.
- Os resultados das simulações apoiam o entendimento geral de similaridades e diferenças entre a interacção plasma-cátodo e plasma-ânodo nas descargas de arco de alta pressão.
- Foi desenvolvida uma teoria da camada de ionização com base num modelo multifluido para o caso de  $T_e$  altas.
- Em todas as comparações com dados experimentais, a concordância foi razoável.

