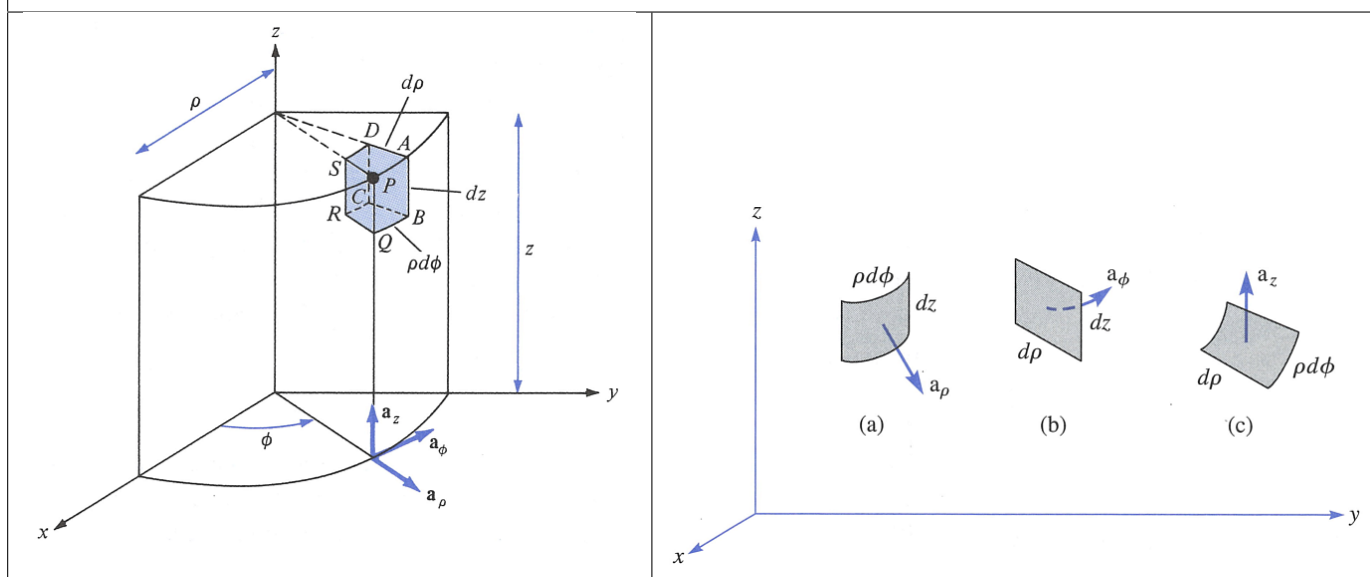


UNIVERSIDADE da MADEIRA
Electromagnetismo
Série de exercícios 12

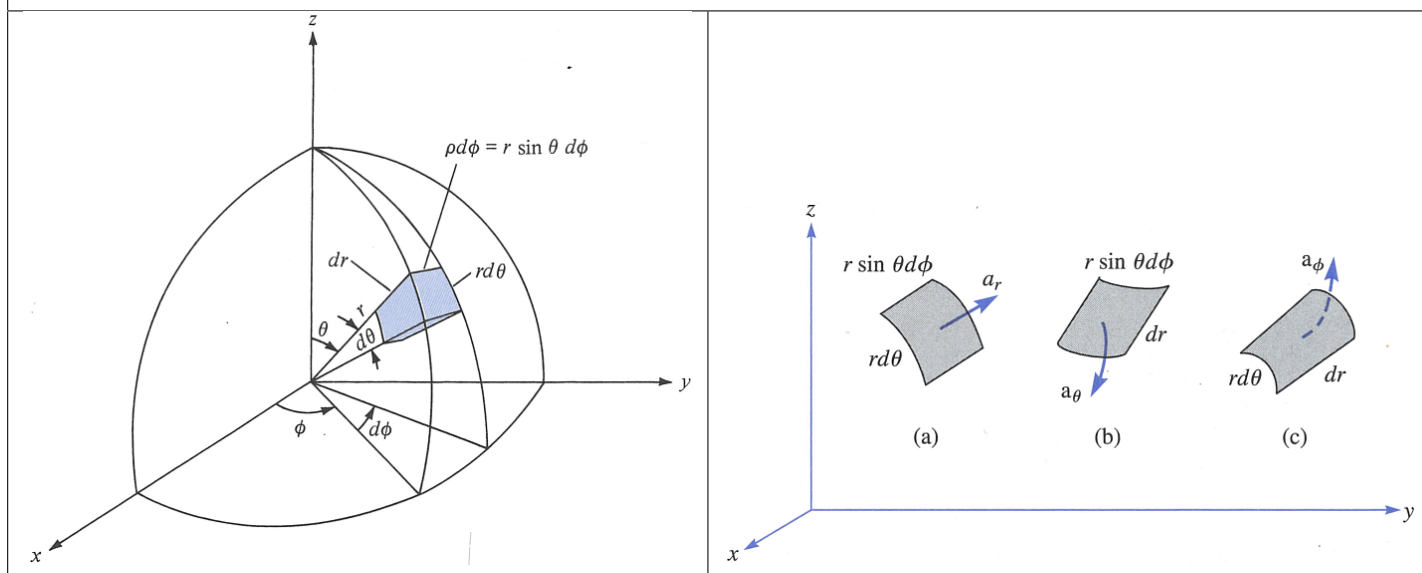
Nota: Os exercícios assinalados com ✖ serão resolvidos nas aulas.

- Sistemas de coordenadas diferentes

Coordenadas cilíndricas



Coordenadas esféricas



Elementos infinitesimais em sistemas de coordenadas diferentes (retirado de Sadiku p.53-57)			
Sistemas de coordenadas	deslocamento diferencial $d\mathbf{l}$	Área normal diferencial $d\mathbf{S}$	Volume diferencial dV
cartesianas	$dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z$	$dydz\mathbf{a}_x$ $dx dz\mathbf{a}_y$ $dx dy\mathbf{a}_z$	$dx dy dz$
cilíndricas	$d\rho\mathbf{a}_\rho + \rho d\phi\mathbf{a}_\phi + dz\mathbf{a}_z$	$\rho d\phi dz\mathbf{a}_\rho$ $d\rho dz\mathbf{a}_\phi$ $\rho d\phi d\rho\mathbf{a}_z$	$\rho d\rho d\phi dz$
esféricas	$dr\mathbf{a}_r + r d\theta\mathbf{a}_\theta + r \sin\theta d\phi\mathbf{a}_\phi$	$r^2 \sin\theta d\theta d\phi\mathbf{a}_r$ $r \sin\theta dr d\phi\mathbf{a}_\theta$ $r dr d\theta\mathbf{a}_\phi$	$r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$

- O rotacional de $\mathbf{A}$ em coordenadas cartesianas (x, y, z) pode ser obtido através de: $\nabla \times \mathbf{A} =$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

- O rotacional de $\mathbf{A}$ em coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) pode ser obtido através de: $\nabla \times \mathbf{A} =$

$$\frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_\rho & \rho\mathbf{a}_\phi & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix}$$

- O rotacional de $\mathbf{A}$ em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) pode ser obtido através de: $\nabla \times \mathbf{A} =$

$$\frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & r\mathbf{a}_\theta & r \sin\theta\mathbf{a}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & rA_\theta & r \sin\theta A_\phi \end{vmatrix}$$

1. Considere o seguinte vector $\mathbf{A}$ em coordenadas cartesianas

$$\mathbf{A} = (y \cos ax)\mathbf{a}_x + (y + e^x)\mathbf{a}_z$$

determine $\nabla \times \mathbf{A}$ na origem.

2. Considere o seguinte vector $\mathbf{A}$ em coordenadas cilíndricas

$$\mathbf{A} = 5\rho \sin\phi\mathbf{a}_z$$

determine $\nabla \times \mathbf{A}$ em $(2, \pi, 0)$.

3. Considere o seguinte vector $\mathbf{A}$ em coordenadas cilíndricas

$$\mathbf{A} = 5e^{-\rho} \cos\phi\mathbf{a}_\rho - 5 \cos\phi\mathbf{a}_z$$

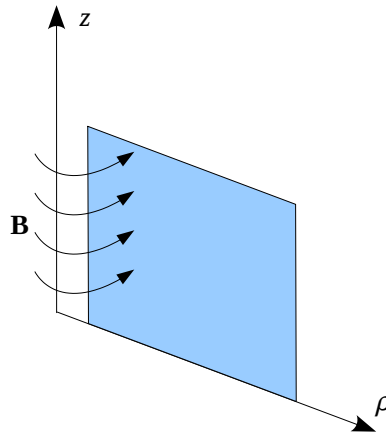
determine $\nabla \times \mathbf{A}$ em $(2, \frac{3}{2}\pi, 0)$.

4. Considere o seguinte vector $\mathbf{A}$ em coordenadas esféricas

$$\mathbf{A} = 10 \sin\theta\mathbf{a}_\theta$$

determine $\nabla \times \mathbf{A}$ em $(2, \frac{\pi}{2}, 0)$.

5. Em coordenadas cilíndricas, $\mathbf{B} = \frac{2.0}{\rho} \mathbf{a}_\phi$ (T). Determine o fluxo magnético que atravessa a superfície, ilustrada na figura, definida por $0.5 \leq \rho \leq 2.5$ m; $0 \leq z \leq 2.0$ m.



6. Considere um filamento de fio que transporta uma corrente de 2.50 A ao longo do eixo dos z , no sentido positivo. Encontre o fluxo do campo magnético através da porção do plano $\phi = \frac{\pi}{4}$ definida por $0.01 < \rho < 0.05$ m; $0 < z < 2$ m.
7. ✖ Considere o potencial vector $\mathbf{A} = -\frac{\rho^2}{4} \mathbf{a}_z$ Wb/m (em coordenadas cilíndricas). Calcule o fluxo magnético total que atravessa a superfície $\phi = \frac{\pi}{2}$; $1 \leq \rho \leq 2$ m; $0 \leq z \leq 5$ m.
8. O potencial vector em coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) é dado por $\mathbf{A} = b\phi \cos a\rho \mathbf{a}_\rho + c\left(\phi + fe^{\frac{\rho}{d}}\right) \mathbf{a}_z$, onde $a = 2 \text{ m}^{-1}$, $b = 32 \text{ T m rad}^{-1}$, $c = 8 \text{ T m rad}^{-1}$, $d = 2$ m, $f = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$. Calcule o fluxo magnético total através da superfície rectangular definida por $1 \text{ m} \leq \rho \leq 2$ m; $\phi = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$; $0 \leq z \leq 5$ m.
9. ✖ Uma distribuição de corrente origina um potencial vector $\mathbf{A} = x^2 y \mathbf{a}_x + y^2 x \mathbf{a}_y - 4xyz \mathbf{a}_z$ Wb/m. Calcule:
- (a) $\mathbf{B}$ em $(-1, 2, 5)$ m
- (b) O fluxo do campo magnético através da superfície definida por $z = 1$ m; $0 \leq x \leq 1$ m; $-1 \text{ m} \leq y \leq 4$ m.

Soluções:

- 1) $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{a}_x - e^x \mathbf{a}_y - \cos ax \mathbf{a}_z$; $\nabla \times \mathbf{A}|_{(0,0,0)} = \mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$; 2) $\nabla \times \mathbf{A} = (5 \cos \phi) \mathbf{a}_\rho - (5 \sin \phi) \mathbf{a}_\phi$; $\nabla \times \mathbf{A}|_{(2,\pi,0)} = -5 \mathbf{a}_\rho$; 3) $\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{5}{\rho} \sin \phi\right) \mathbf{a}_\rho + \left(\frac{5}{\rho} e^{-\rho} \sin \phi\right) \mathbf{a}_z$; $\nabla \times \mathbf{A}|_{(2,\frac{3}{2}\pi,0)} = (-2.5) \mathbf{a}_\rho + \left(-\frac{2.5}{e^2}\right) \mathbf{a}_z$; 4) $\nabla \times \mathbf{A} = \frac{10 \sin \theta}{r} \mathbf{a}_\phi$; $\nabla \times \mathbf{A}|_{(2,\frac{\pi}{2},0)} = 5 \mathbf{a}_\phi$; 5) $\Phi_{\mathbf{B}} = 4.0 \ln 5 \text{ Wb} \approx 6.44 \text{ Wb}$; 6) $\Phi_{\mathbf{B}} = 1.61 \mu\text{Wb}$. 7) $\Phi_{\mathbf{B}} = 3,75 \text{ Wb}$; 8) $\Phi_{\mathbf{B}} = 44.80 \text{ Wb}$; 9a) $\mathbf{B} = (20, 40, 3) \text{ T}$ (ou Wb m^{-2}); 9b) $\Phi_{\mathbf{B}} = 20 \text{ Wb}$.