UNIVERSIDADE da MADEIRA

Estudo do Meio III

Módulo de Física

Nelson Almeida

26 de Dezembro de 2024

Conteúdo

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Parte I

Sebenta das aulas TP

Capítulo 1

Introdução

1.1 Notas prévias

O módulo de física da disciplina *Estudo do Meio III* do curso *Educação Básica* tem como principais objectivos:

- A compreensão dos conceitos e princípios básicos da física. Aplicação dos conceitos e princípios básicos aos fenómenos da vida do dia-a-dia, da natureza e da tecnologia.
- Dar aos alunos (futuros professores) formação de base em física com particular incidência para os conteúdos presentes nos programas do 1^{o} e 2^{o} ciclos do Ensino Básico.
- Estimular a curiosidade e o espírito crítico.
- Dotar os alunos de ferramentas para que quando confrontados com um determinado fenómeno físico consigam investigá-lo e explicá-lo.

Pretende-se com esta sebenta fornecer de forma bastante concisa alguns princípios de física geral. A leitura destes apontamentos permitirá complementar os temas discutidos nas aulas, abrindo perspectivas para explorações mais aprofundadas de cada um deles. Ou seja, aconselha-se o aluno que pretenda obter uma boa classificação na disciplina a que consulte bibliografia adicional acerca dos assuntos abordados. Em particular, a bibliografia recomendada pelo docente (ver ficha da disciplina) e a utilizada na elaboração desta sebenta (que se encontra no fim do texto).

Na elaboração desta sebenta, e dentro do possível, houve o cuidado de se usar uma escrita rigorosa e uma simbologia o mais actualizada possível, no entanto, esta sebenta não está certamente isenta de, apesar de involuntárias, omissões e incorrecções[1].

Tomou-se em consideração que a carga horária atribuída para a lecionação deste módulo é de apenas 12 semanas de aulas TP (teórico-práticas) de $2\,\mathrm{h}$ e de 10 semanas de aulas PL (práticas e

[1] Apesar de se encontrar em permanente actualização, aceitam-se e agradecem-se sugestões, comentários e correcções, de preferência, enviados para nelson@uma.pt.

laboratoriais) de $2\,\mathrm{h}$. Ou seja, pouco tempo para falar de um assunto tão interessante e vasto, por conseguinte, optou-se por não falar de alguns tópicos também eles muito interessantes, e.g., física nuclear, física moderna, etc.

1.2 Para quê estudar física?

A física é uma ciência que tem como principal objectivo o estudo dos princípios nos quais o Universo se baseia. A física também é geralmente considerada como a mais quantitativa das ciências, já que nela se faz muito uso da matemática e de medições numéricas para desenvolver e testar teorias. A matemática serve como uma linguagem compacta, permitindo enunciados mais breves e mais precisos do que seria possível sem a sua utilização. Assim, é importante para o estudante de física possuir alguns conhecimentos de matemática.

As teorias físicas são fortemente baseadas em modelos, estes modelos tentam descrever de forma simples (ainda que aproximada) o sistema em estudo.

A física é uma ciência extremamente prática. Não só explica como as coisas funcionam ou porque não funcionam, como também nos ajuda a criar, melhorar, e reparar essas coisas. Em virtude dessa relação essencial entre a física e os objetos reais, os livros introdutórios de física são essencialmente manuais de utilizador para o mundo em que vivemos.

Esperamos com este trabalho cativar o estudante para o estudo do magnífico mundo físico que nos rodeia. Em particular, pretende-se que o estudante consiga:

- apreciar os diversos fenómenos que ocorrem à sua volta de uma forma mais unificada, ver um mundo governado por princípios físicos, e perceber como estes princípios servem como fundação para a compreensão de outros ramos da ciência como a biologia e a química;

- aplicar os princípios da física na resolução de problemas e perceber como alguns problemas que surgiram no passado foram resolvidos usando estes princípios;

- questionar-se acerca dos mistérios do universo físico que persistem.

1.3 Sistemas de unidades

1.3.1 Medição

A física é uma ciência que se baseia na medição. Quando medimos estamos a comparar uma determinada grandeza física, directa ou indirectamente, com uma quantidade padrão que recebe o nome de **unidade** da grandeza em causa.

Por exemplo, para medirmos a distância entre dois pontos podemos (e devemos) utilizar uma unidade padronizada, como é o caso do metro. Afirmar que a distância entre dois pontos é $10\,\mathrm{m}$, é o mesmo que dizer que é 10 vezes o comprimento da unidade metro.

Não nos podemos esquecer de incluir sempre a unidade da medida em questão, neste caso metro (m), pois existem outras unidades de medida para o comprimento, tais como o quilómetro (km), a milha (mi), a polegada (in), etc. Assim, a magnitude de uma grandeza física deve sempre incluir um número e uma unidade; como exceção temos o caso das grandezas adimensionais (das quais iremos falar mais à frente), cujo valor é apenas especificado por um número com significado físico (e.g., índice de refracção (ver secção 5.1), coeficiente de atrito (ver secção 2.6), etc).

1.3.2 Grandezas e unidades fundamentais

No total são necessárias 7 grandezas físicas (estas grandezas chamam-se fundamentais ou grandezas de base) para expressar qualquer grandeza física existente (as que não são fundamentais chamam-se grandezas derivadas), no entanto, no caso da mecânica, apenas são necessárias 3. Por exemplo, a velocidade, o momento e a força, que são todas grandezas físicas pertencentes ao domínio da mecânica (e que irão ser estudadas no capítulo 2) podem ser expressas à custa de 3 grandezas físicas fundamentais, são elas: comprimento, massa e tempo. A escolha de unidades padronizadas para estas grandezas fundamentais determina um sistema de unidades.

Dos muitos sistemas existentes, utilizaremos apenas um no decorrer desta sebenta, por tratar-se do sistema usado quase universalmente pela comunidade científica, o Sistema Internacional de Unidades[2], com a abreviatura SI[3]. Isto não quer dizer que por vezes não possamos utilizar outras unidades, quando tal se justifique ou por razões históricas ou por termos uma maior sensibilidade a essa unidade.

Para expressar todas as grandezas físicas, convenientemente, é necessário um pequeno número de unidades fundamentais, assim o SI utiliza as grandezas fundamentais comprimento, massa, tempo, corrente eléctrica, temperatura, quantidade de matéria e intensidade luminosa, com as unidades SI metro (m), quilograma (kg), segundo (s), ampere (A), kelvin (K), mole (mol) e candela (cd).

Está fora do âmbito desta sebenta introduzir a definição precisa para cada um destes padrões. No entanto, para o estudante mais interessado podemos indicar o livro [de Almeida 2002].

1.3.3 Prefixos

A tabela 1.1 contém alguns dos prefixos que o estudante poderá vir a encontrar no domínio da física.

---

[2]Em Portugal, este sistema foi adoptado em 7 de Dezembro de 1983, através do Decreto-Lei nº 427/83.

[3]Esta abreviatura não tem ponto (i.e., não deve escrever-se S.I.). O seu nome deriva do francês (*Système Internationale*).

Múltiplo	Prefixo	Símbolo	Submúltiplo	Prefixo	Símbolo
10	deca	da	10^{-1}	deci	d
10^2	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^3	quilo	k	10^{-3}	mili	m
10^6	mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^{15}	peta	P	10^{-15}	fento	f
10^{18}	hexa	E	10^{-18}	ato	a
10^{21}	zetta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{24}	yotta	Y	10^{-24}	yocto	y

Tabela 1.1: Múltiplos e submúltiplos do SI.

De notar que todos os múltiplos ou submúltiplos são indicados justapondo o respectivo prefixo à unidade de base ou derivada, excepto a unidade de massa que se forma pela junção dos prefixos à palavra "grama" ($\mathrm{kg}, \mathrm{dg}, \mathrm{mg}$).

1.3.4 Conversão de unidades

Frequentemente, é necessário mudar as unidades nas quais uma grandeza física é expressa. Por exemplo, podemos necessitar converter uma distância medida em milhas terrestres[4] (uma unidade mais utilizada nos EUA) para metros. Para isso, basta sabermos qual a relação que existe entre o metro e a milha (este tipo de relações também são designadas por factores de conversão). Uma milha equivale a aproximadamente 1609 metros, ou escrevendo de forma mais abreviada[5]: $1\,\mathrm{mi} \approx 1609\,\mathrm{m}$. Assim, basta multiplicar o valor de milhas que temos pelo factor de conversão que obtemos o nosso resultado em metros.

Exercício 1.1 Converta 15 polegadas ($15\,\mathrm{in}$) em centímetros, sabendo que $1\,\mathrm{in} = 2,54\,\mathrm{cm}$.

Resolução: Intuitivamente sabemos que temos que multiplicar o número de polegadas pelo comprimento de cada polegada: $15\,\mathrm{in} = 15\,\mathrm{in} \times \frac{2.54\,\mathrm{cm}}{1\,\mathrm{in}}$, este último factor é igual a 1, por isso o lado esquerdo e direito são consistentes. Obtemos então: $15\,\mathrm{in} = 38.1\,\mathrm{cm} \approx 38\,\mathrm{cm}$.

[4] Quando se diz apenas milha referi-mo-nos à milha terrestre. A título de curiosidade a milha marítima corresponde a cerca de $1852\,\mathrm{m}$.

[5] Chamamos a atenção para o símbolo que iremos utilizar, $\approx$, este símbolo significa "aproximadamente igual a". Também se pode utilizar o símbolo "$\simeq$" com o mesmo fim. No decorrer deste texto por vezes iremos utilizar o símbolo $=$, apesar de na realidade ter havido arredondamentos.

Exercício 1.2 A estrela Sirius encontra-se a 8 a.l. da Terra (a abreviatura para ano luz em português é a.l.). 1 ano luz corresponde à distância percorrida pela luz durante um ano. Sabendo que 1 ano luz corresponde aproximadamente a $10^{16}\,\mathrm{m}$, expresse a distância à estrela Sirius em metros.

Resolução: 8 a.l. $= 8$ a.l. $\times \frac{10^{16}\,\mathrm{m}}{1\text{ a.l.}}$, este último factor é igual a 1, por isso o lado esquerdo e direito são consistentes. O símbolo a.l. aparece no numerador e no denominador logo podemos simplificar a nossa expressão:

8 a.l. $= 8 \times \frac{10^{16}\,\mathrm{m}}{1} = 8 \times 10^{16}\,\mathrm{m}$.

Exercício 1.3 Expresse uma velocidade de 60 milhas por hora em metros por segundo.

Resolução: $60\frac{\mathrm{mi}}{\mathrm{h}} \times \overbrace{\frac{1609\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{mi}}}^{\text{vale } 1} \times \overbrace{\frac{1\,\mathrm{h}}{60\,\mathrm{min}}}^{\text{vale } 1} \times \overbrace{\frac{1\,\mathrm{min}}{60\,\mathrm{s}}}^{\text{vale } 1} = \frac{1609}{60}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 26.8167\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 27\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

1.4 Análise dimensional

Já foi referido na secção 1.3.2 que o SI utiliza 7 grandezas físicas fundamentais, e que cada uma dessas grandezas tem uma unidade associada. Uma grandeza física pode ser expressa em diferentes unidades, no entanto, existe uma propriedade única para cada grandeza física, essa propriedade chama-se dimensão[6]. A dimensão de uma grandeza física é uma propriedade inerente e invariável dessa mesma grandeza. A grandeza indicada só pode ter uma dimensão física específica. O inverso, porém, não é verdadeiro: diferentes grandezas físicas podem ter a mesma dimensão física.

Tal como existem 7 grandezas físicas fundamentais existem 7 dimensões associadas a essas grandezas e, qualquer grandeza física, não importa o quão complexa, pode ser expressa como uma combinação algébrica dessas 7 dimensões. Por exemplo, a dimensão de um volume designa-se por $\dim V$ ou mais abreviadamente por $[V]$ (de uma forma geral sempre que usarmos os parênteses rectos estaremos a referir-mo-nos a dimensões) e pode obter-se da seguinte forma

$$[V] = \mathrm{L} \times \mathrm{L} \times \mathrm{L} = \mathrm{L}^3 \tag{1.1}$$

Na tabela 1.2 são apresentadas as 7 grandezas de base do SI, as respectivas dimensões e unidades, bem como os símbolos mais utilizados para as designar.

De uma forma genérica podemos dizer que qualquer grandeza física no SI tem de dimensão $\mathrm{L}^a\mathrm{M}^b\mathrm{T}^c\mathrm{I}^d\Theta^e\mathrm{N}^f\mathrm{J}^g$, onde os expoentes a, b, c, d, e, f e g podem ser números inteiros positivos, inteiros negativos ou até mesmo fracionários. No caso particular de todos os expoentes serem

[6] Não confundir com dimensão espacial de um objecto.

grandeza de base		**dimensão**	**unidade SI de base**	
nome	símbolo		**nome**	**símbolo**
comprimento	l, L	L	metro	m
massa	m	M	quilograma	kg
tempo	t	T	segundo	s
intensidade de corrente eléctrica	I	I	ampere	A
temperatura termodinâmica	T	Θ	kelvin[7]	K
quantidade de matéria	n	N	mole	mol
intensidade luminosa	I_v	J	candela	cd

Tabela 1.2: Grandezas e unidades de base do SI.

nulos dizemos que a grandeza física em questão não tem dimensões, ou dito de outra forma é adimensional.

Vamos agora restringir o nosso estudo a grandezas da área da mecânica. O comprimento, o tempo, e a massa especificam as três dimensões fundamentais da área da mecânica. A velocidade, por exemplo, é um comprimento por unidade de tempo. A dimensão de uma velocidade escreve-se da seguinte forma

$$[v] = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}} = \mathrm{LT}^{-1} \tag{1.2}$$

Deve ter-se especial cuidado para não confundir a dimensão de uma grandeza com as unidades em que é medida. Uma velocidade pode ter unidades de metros por segundo, milhas por hora, etc. Todas estas escolhas diferentes de unidades são consistentes com a dimensão LT^{-1}.

As dimensões são úteis para verificar as equações, visto que cada termo de uma equação deve ter as mesmas dimensões. Por exemplo, uma área não pode ser adicionada a um volume. O estudo das dimensões de uma equação designa-se por análise dimensional. A consistência dimensional é uma condição necessária mas não suficiente para que uma equação esteja correcta. Uma equação pode ter dimensões correctas em todos os seus termos sem que no entanto descreva qualquer situação física.

Os factores numéricos numa equação normalmente não têm dimensões, a não ser que seja dito algo em contrário.

Exercício 1.4 Considere a seguinte expressão, onde T é o período de oscilação de um pêndulo (i.e., a grandeza física envolvida é um tempo), l é o comprimento do pêndulo e g é aceleração da gravidade (uma aceleração é o quociente entre uma velocidade e um intervalo de tempo)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Verifique se a expressão é dimensionalmente correcta.

Resolução:

$$[T] = \left[2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\right] = \left[\sqrt{\frac{l}{g}}\right] = \sqrt{\frac{[l]}{[g]}} = \sqrt{\frac{\mathrm{L}}{\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}^2}}} = \sqrt{\mathrm{T}^2} = \mathrm{T}$$

Logo, a expressão é dimensionalmente correcta.

1.5 Operações matemáticas com unidades

Ao resolver problemas, iremos muitas vezes usar equações que expressam as relações existentes entre várias grandezas físicas. Quando queremos resolver uma equação em ordem a uma das grandezas substituindo o valor das outras grandezas, é importante incluirmos as unidades juntamente com os valores numéricos. Desta forma obteremos não apenas a resposta numérica correcta, mas também as unidades correctas. Para além disso, as nossas hipóteses de errar durante os vários passos da resolução serão mais reduzidas pois no final, em caso erro, as unidades seriam outras que não as esperadas. Pode também ser uma forma de ver se a expressão de onde partimos faz algum sentido (ou seja, para além da análise dimensional, outra forma de verificar uma equação é ver se as unidades são coerentes).

Exercício 1.5 Considere a seguinte equação, onde x representa uma distância, a representa uma aceleração e t representa o tempo.

$$x = \frac{1}{2}at^2 \tag{1.3}$$

Calcule x para o instante $t = 4\,\mathrm{s}$, sabendo que a aceleração $a = 3\,\mathrm{m/s^2}$.

Resolução: Começamos por substituir os valores na nossa equação

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \times 3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \times (4\,\mathrm{s})^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \times 16\,\mathrm{s}^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times 16\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,\mathrm{s}^2 \\ &= 24\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

O resultado em termos de unidades faz sentido, logo é provável que a expressão que utilizámos seja correcta e que não tenhamos cometido nenhum erro durante os cálculos. Vamos imaginar que em vez da expressão (1.3) tínhamos partido da expressão $x = \frac{1}{2}at$, nesse caso ao substituirmos os nossos valores com as respectivas unidades na equação iríamos obter para x as unidades $\mathrm{m/s}$, o que não fazia sentido. Dessa forma, podíamos inferir que ou partimos de um equação errada ou cometemos um erro durante os cálculos. É claro que obter unidades correctas não é garantia de que tenhamos feito tudo correcto, mas diminui a probabilidade de estarmos errados.

1.6 Notação científica

Na física depara-mo-nos muitas vezes com números muito grandes e muito pequenos. Por exemplo, a massa da Terra é cerca de $5970\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,\mathrm{kg}$, a massa de um electrão é cerca de $0.000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,911\,\mathrm{kg}$. Estes dois números têm em comum o facto de terem muitos zeros, através do uso da notação científica conseguimos simplificar muito a escrita deste tipo de números. A notação científica tem como base o uso de potências de 10. Neste tipo de notação a massa da Terra escreve-se como $5.97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$ e a massa de um electrão escreve-se como $9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$. Os números em notação científica são constituídos por dois factores. O primeiro factor designa-se por mantissa o segundo designa-se por potência de 10, a potência de 10 inclui um expoente. A mantissa é um número que pertence obrigatoriamente ao intervalo $[1; 10[$. Tanto a mantissa como o expoente podem omitir-se se se trata apenas do número 1. No caso da massa da Terra temos então

$$\underbrace{5.97}_{\text{mantissa}} \times \underbrace{10^{\overbrace{24}^{\text{expoente}}}}_{\text{potência de 10}}\ \mathrm{kg} \tag{1.4}$$

Mais exemplos: $1000 = 10^3$; $0,001 = 10^{-3}$; $67803400 = 6,78034 \times 10^7$.

Exercício 1.6 Escreva os seguintes números em notação científica: 5439000; $0,0003453033$; 9234×10^{-2}; $0,023 \times 10^{-5}$.

Solução: $5,439000 \times 10^6$; $3,453033 \times 10^{-4}$; $9,234 \times 10^1$; $2,3 \times 10^{-7}$.

Uma grande vantagem da notação científica é a de podermos realizar multiplicações e divisões de forma mais rápida. Por exemplo, se quisermos multiplicar a massa da Terra pela massa de um electrão podemos fazê-lo da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 5.97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg} \times 9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg} &= (5.97 \times 9.11) \times 10^{24-31}\,(\mathrm{kg} \times \mathrm{kg}) \\ &= (54.386\,7) \times 10^{-7}\,\mathrm{kg}^2 \\ &= 5.43867 \times 10^1 \times 10^{-7}\,\mathrm{kg}^2 \\ &\approx 5.44 \times 10^{-6}\,\mathrm{kg}^2 \end{aligned}$$

No caso de uma divisão a potência de base 10 resultante é o resultado da subtração dos expoentes envolvidos. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \frac{5.97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}}{9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}} &= \frac{5.97}{9.11} \times 10^{24-(-31)} \left(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{kg}}\right) \\ &= 0.655324 \times 10^{55} \\ &= 6.55324 \times 10^{-1} \times 10^{55} \\ &\approx 6.55 \times 10^{54} \end{aligned}$$

Vale a pena notar que $10^0 = 1$, o que obedece à regra, vejamos, e. g. sabemos que $\frac{100}{100} = 1$, e segundo a regra também temos $\frac{100}{100} = \frac{10^2}{10^2} = 10^{2-2} = 10^0$. No decorrer desta sebenta a notação científica irá ser usada extensivamente.

1.7 Ordem de grandeza de um número

A ordem de grandeza de um número define-se como sendo a potência de 10 com expoente inteiro que melhor se aproxima desse número.

Por exemplo, para determinar a ordem de grandeza de 2 devemos comparar esse número com as potências de 10 imediatamente antes e imediatamente depois, que são respectivamente 10^0 e 10^1. Sabemos então que a ordem de grandeza será uma destas duas. Falta arranjar mais um critério para saber de qual está mais perto. O critério é o seguinte: comparamos o número em questão (2) com o ponto médio entre as potências de 10 que é $10^{\frac{0+1}{2}} = 10^{0,5} = \sqrt{10} \approx 3,\,162\,28$. Como o número 2 é mais pequeno do que $\sqrt{10}$ podemos então dizer que a ordem de grandeza de 2 é 10^0 ou 1. Em escrita simplificada usa-se a seguinte notação

$$2 \sim 1 \tag{1.5}$$

onde o "$\sim$" significa "da ordem de".

Assim, sempre que quisermos determinar a ordem de grandeza de um número devemos seguir os seguintes passos:

- Passar o número para notação científica (se já não estiver).
- Comparar esse número com $\sqrt{10}$.
  - Se for inferior a $\sqrt{10}$ a ordem de grandeza é a da potência de 10 do número quando representado na notação científica.
  - Se for superior a $\sqrt{10}$ a ordem de grandeza é a da potência de 10 do número quando representado na notação científica adicionada de 1 unidade.

Exercício 1.7 Determine a ordem de grandeza de $35; 579; 0,307$.

Resolução:

$$\begin{aligned}
35 &= \underbrace{3,5}_{>\sqrt{10}} \times 10^1 \sim 10^1 \times 10^1 = 10^2 \\
579 &= \underbrace{5,79}_{>\sqrt{10}} \times 10^2 \sim 10^1 \times 10^2 = 10^3 \\
0,307 &= \underbrace{3,07}_{<\sqrt{10}} \times 10^{-1} \sim 10^0 \times 10^{-1} = 10^{-1}
\end{aligned}$$

É também possível compararmos as ordens de grandeza de dois números, vejamos.

Exercício 1.8 Quantas ordens de grandeza tem o número $0,016$ a menos que $0,032$?

Resolução:

$$\begin{aligned} 0,016 &= \underbrace{1,6}_{<\sqrt{10}} \times 10^{-2} \sim 10^{-2} \\ 0,032 &= \underbrace{3,2}_{>\sqrt{10}} \times 10^{-2} \sim 10^{1} \times 10^{-2} = 10^{-1} \end{aligned}$$

Para comparar a ordem de grandeza vamos encontrar o quociente entre as duas

$$\frac{10^{-2}}{10^{-1}} = 10^{-1}$$

Assim, podemos dizer que o número $0,016$ tem uma ordem de grandeza a menos que $0,032$.

1.8 Percentagem

Em matemática, uma percentagem é um número ou proporção expressa como uma fracção de 100. Denota-se frequentemente com o sinal de percentagem, "$\%$" ou, de forma menos comum, com a abreviatura "pct.". Ou seja, pode dizer-se que é uma forma diferente de representar um número, onde o símbolo $\%$ representa $\frac{1}{100}$. Por exemplo, 25% (lido como "vinte e cinco por cento") é igual a $25/100$, ou $0,25$. Outro exemplo, $2\% = 2 \times \frac{1}{100} = 0,02$. Podemos dizer que as percentagens são usadas para expressar o quão grande ou pequena uma quantidade é relativa a uma outra quantidade.

Exercício 1.9 Calcule 25% de 80.

Resolução: $25 \times \frac{1}{100} \times 80 = \underbrace{\frac{25}{100}}_{=\frac{1}{4}} \times 80 = 20.$

Exercício 1.10 Se 15% de 200 maçãs estão estragadas. Quantas maçãs estão estragadas?

Resolução: $\frac{15}{100} \times 200$ maçãs $= 30$ maçãs.

Exercício 1.11 Um skate viu o seu preço reduzido em 25%. O preço antigo do skate era 120 €. Determine o preço novo do skate.

Resolução: A redução em euros pode ser obtida da seguinte forma: $\frac{25}{100} \times 120$ € $= 30$ €

Logo, o preço novo do skate é: 120 € -30 € $= 90$ €.

Resolução alternativa: 120 € $\times (100 - 25)\,\%= 120$ € $\times 0,75 = 90$ €.

1.9 Variação

1.9.1 Variação absoluta

A variação absoluta é definida como a diferença entre o valor final, x_f, e o valor incial, x_i, de uma dada grandeza. A letra que se usa, normalmente, para designar variação é a letra maíscula delta (Δ). Assim,

$$\Delta x = x_f - x_i \tag{1.6}$$

Exercício 1.12 Uma dada grandeza tinha inicialmente o valor $2,0$. Passado algum tempo, o seu valor passou a ser $3,5$. Qual a variação absoluta desta grandeza

Resolução: Seja x a grandeza em questão. $\begin{cases} x_i = 2,0 \\ x_f = 3,5 \end{cases} \longrightarrow \Delta x = x_f - x_i = 3,5 - 2,0 = 1,5.$

Exercício 1.13 Um número duplicou o seu valor incial. Quanto foi a sua variação absoluta?

Resolução: $x_f = 2x_i \longrightarrow \Delta x = x_f - x_i = 2x_i - x_i = x_i.$

1.9.2 Variação relativa e variação relativa percentual

A variação relativa define-se como o quociente entre a variação absoluta e a grandeza inicial. Ou seja

$$\frac{\Delta x}{x_i} \tag{1.7}$$

A variação relativa percentual (também designada por apenas variação relativa) define-se como o quociente entre a variação absoluta e a grandeza inicial a multiplicar por 100%. Ou seja

$$\frac{\Delta x}{x_i} \times 100\% \tag{1.8}$$

Exercício 1.14 Uma grandeza duplicou o seu valor incial. Quanto foi a sua variação relativa?

Resolução: $x_f = 2x_i \longrightarrow \frac{\Delta x}{x_i} = \frac{x_f - x_i}{x_i} = \frac{2x_i - x_i}{x_i} = 1.$

Exercício 1.15 Uma grandeza duplicou o seu valor incial. Quanto foi a sua variação relativa percentual?

Resolução: $x_f = 2x_i \longrightarrow \frac{\Delta x}{x_i} \times 100\% = \frac{x_f - x_i}{x_i} \times 100\% = \frac{2x_i - x_i}{x_i} \times 100\% = 1 \times 100\% = 100\%.$

Exercício 1.16 Uma grandeza aumentou para $6/4$ do valor inicial. Quanto foi a sua variação relativa percentual?

Resolução: $x_f = \frac{6}{4}x_i \longrightarrow \frac{x_f - x_i}{x_i} \times 100\% = \frac{\frac{6}{4}xi - x_i}{x_i} \times 100\% = \frac{\frac{6}{4} - 1}{1} \times 100\% = \frac{\frac{6}{4} - \frac{4}{4}}{1} \times 100\% = \frac{2}{4} \times 100\% = 50\%$

Exercício 1.17 Uma grandeza aumentou $6/4$ do valor inicial. Quanto foi a sua variação relativa percentual?

Resolução: $x_f = x_i + \frac{6}{4}x_i \longrightarrow \frac{x_f - x_i}{x_i} \times 100\% = \frac{x_i + \frac{6}{4}x_i - x_i}{x_i} \times 100\% = \frac{6}{4} \times 100\% = 1,5 \times 100\% = 150\%$

Exercício 1.18 Um número diminuiu de $9,6$ para $2,4$. Quanto foi a sua variação relativa percentual?

Resolução: $\frac{x_f - x_i}{x_i} \times 100\% = \frac{2,4-9,6}{9,6} \times 100\% = -0.75 \times 100\% = -75\%$

1.10 Cálculos aproximados e cálculos sem calculadora

Nos últimos anos o ensino foi sendo invadido por calculadoras. Haver a possibilidade de usar calculadoras para cálculos complexos é bom, no entanto, muitas vezes as pessoas usam-nas de forma automática e sem espiríto crítico, mesmo quando a sua necessidade é perfeitamente dispensável. É necessário ter sempre um espírito crítico relativamente ao valor devolvido por uma calculadora. Será que o valor que acabámos de calcular faz algum sentido? Esta é uma pergunta que devemos sempre fazer a nós próprios. Ou seja, pretende-se através de cálculo mental ter uma ideia, ainda que aproximada, do resultado que queremos calcular. É uma habilidade que se ganha praticando. Mesmo quem tem bastantes dificuldades em cálculo mental pode treinar-se por forma a atingir patamares mais elevados. Assim, é também objectivo desta cadeira tornar o estudante menos dependente do uso de calculadoras. Será que não é útil podermos ir às compras e conseguirmos fazer uma estimativa mental do valor que se vai gastar?

Exercício 1.19 Num supermercado tenho os seguinte items no meu cesto de compras: Um pacote de bolachas que custa $1,34$ €, um saco com pães que custa $0,88$ € e uma garrafa de água que custa $0,27$ €. Faça uma estimativa mental do valor a pagar.

Resolução: Neste caso relativamente simples poderia somar tudo mentalmente, mas pretende-se apenas que se faça uma estimativa. Assim, vamos fazer um estimativa com base em arredondamentos. $1,34$ vou arreendondar por defeito para $1,3$; $0,27$ vou arredondar por excesso para $0,3$ e $0,88$ vou arredondar por excesso para $0,9$. Assim, a conta que temos que fazer mentalmente passa a ser: $1,3$ € $+ 0,9$ € $+ 0,3$ € $= 2,5$ €, este é o valor que estou à espera de pagar. Na realidade, fazendo as contas sem arredondamentos o valor a pagar seria: $1,34$ €$+0,88$ € $+ 0,27$ € $= 2.49$ €. Logo, a nossa estimativa é bastante boa, representa um desvio do valor real de apenas $\left|\frac{2,5-2,49 \text{ €}}{2,49 \text{ €}}\right| \times 100\% = 0.401606\% \approx 0,4\%$.

Nota: Para x_i deve ser sempre escolhido o valor esperado ou exacto.

Existem problemas para os quais não temos valores bem definidos à partida, temos uma ideia da ordem de grandeza dos valores envolvidos mas mais nada. Mesmo nesses casos, com um pouco de engenho e experiência podemos muitas vezes fazer uma estimativa razoável. Vejamos como nos exercícios seguintes se podem fazer estimativas simples recorrendo às ordens de grandeza

Exercício 1.20 Uma pessoa em média respira 10 vezes por minuto. Faça uma estimativa da ordem de grandeza do número total de vezes que terá respirado aos 65 anos.

Resolução:

$$\frac{10\text{ vezes}}{\mathrm{min}} \times 65\text{ ano} \qquad \text{(teremos que converter as unidades)}$$

$$= \frac{10\text{ vezes}}{\mathrm{min}} \times \overbrace{\frac{60\,\mathrm{min}}{1\,\mathrm{h}}}^{1} \times \overbrace{\frac{24\,\mathrm{h}}{1\text{ dia}}}^{1} \times \overbrace{\frac{365\text{ dia}}{1\text{ ano}}}^{1} \times 65\text{ ano} = 10 \times 60 \times 24 \times 365 \times 65\text{ vezes}$$

Como estamos interessados em ordens de grandeza vamos estimar a ordem de grandeza de cada um dos factores:

$10 \sim 10$; $60 \sim 10^2$; $24 \sim 10$; $365 \sim 10^3$; $65 \sim 10^2$. Assim, a pessoa terá respirado aproximadamente

$$10 \times 10^2 \times 10 \times 10^3 \times 10^2\text{ vezes} = 10^9\text{ vezes}$$

A título de curiosidade, o valor sem arredondamentos seria:

$$\frac{10\text{ vezes}}{\mathrm{min}} \times \frac{60\,\mathrm{min}}{1\,\mathrm{h}} \times \frac{24\,\mathrm{h}}{1\text{ dia}} \times \frac{365\text{ dia}}{1\text{ ano}} \times 65\text{ ano} = 10 \times 60 \times 24 \times 365 \times 65\text{ vezes}$$
$$= 3,4164 \times 10^8\text{ vezes} \approx 3,4 \times 10^8\text{ vezes}$$

Ou seja, a nossa estimativa apresentou um desvio de cerca de $\left|\frac{3{,}4\times10^8-10^9}{3{,}4\times10^8}\right| \times 100\% = 194,12\% \approx 194\%$.

Exercício 1.21 **TPC** Uma pessoa em média tem um ritmo cardíaco de 70 batimentos por minuto e vive 75 anos. Faça uma estimativa da ordem de grandeza do número total de batimentos cardíacos.

Resolução:

$$\frac{70\text{ bat}}{\mathrm{min}} \times \frac{60\,\mathrm{min}}{1\,\mathrm{h}} \times \frac{24\,\mathrm{h}}{1\text{ dia}} \times \frac{365\text{ dia}}{1\text{ ano}} \times 75\text{ ano} = 70 \times 60 \times 24 \times 365 \times 75\text{ bat}$$

Como estamos interessados em ordens de grandeza vamos estimar a ordem de grandeza de cada um dos factores:

$70 \sim 10^2$; $60 \sim 10^2$; $24 \sim 10$; $365 \sim 10^3$; $75 \sim 10^2$. Assim, o coração terá batido aproximadamente

$$10^2 \times 10^2 \times 10 \times 10^3 \times 10^2 \text{ bat} = 10^{10} \text{ bat}$$

A título de curiosidade, o valor sem arredondamentos seria:

$$\begin{aligned}\frac{70 \text{ bat}}{\text{min}} \times \frac{60\,\text{min}}{1\,\text{h}} \times \frac{24\,\text{h}}{1 \text{ dia}} \times \frac{365 \text{ dia}}{1 \text{ ano}} \times 75 \text{ ano} &= 70 \times 60 \times 24 \times 365 \times 75 \text{ bat} \\ &= 2759400000 \text{ bat} \approx 2,8 \times 10^9 \text{ bat}\end{aligned}$$

Ou seja, a nossa estimativa apresentou um desvio de cerca de $\left|\frac{2,8\times10^9-10^{10}}{2,8\times10^9}\right| \times 100\% = 257.143\% \approx 257\%$.

1.11 Média

A média (também designada média aritmética) de um conjunto de n valores $x_1, x_2, \cdots, x_n$ designa-se por $\overline{x}$ e é calculada através da seguinte expressão

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{1.9}$$

Exercício 1.22 Calcule a média dos seguintes valores $12, 14, 9, 34, 5$.

Resolução: A média é $\frac{12+14+9+34+5}{5} = \frac{74}{5} = 14,8 \approx 15$.

Adicionalmente à média aritmética define-se também a média ponderada da seguinte forma

$$\overline{x} = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \tag{1.10}$$

onde w_i designa os diferentes pesos atribuídos a cada um dos valores. Os pesos nesta definição têm de obedecer à seguinte condição

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \tag{1.11}$$

A média aritmética pode ser obtida através da expressão (1.10) se considerarmos o caso particular de todos os pesos serem iguais.

Exercício 1.23 Determine a classificação média de um aluno que obteve 12 num teste escrito com um peso de 50%, 10 num relatório com um peso de 30% e 13 nas intervenções efetuadas no decorrer das aulas com um peso de 20%.

Resolução: $\overline{x} = \frac{50}{100} \times 12 + \frac{30}{100} \times 10 + \frac{20}{100} \times 13 = 11,6 \approx 12$.

tipo de escala	erro máximo do aparelho
discreta	menor unidade representável
contínua	menor unidade representável/2

Tabela 1.3: Erros máximos de aparelhos de medida.

1.12 Erros de medição

Uma grande parte das vezes calcular o erro associado a uma grandeza é um processo complicado e laborioso está, portanto, fora do âmbito desta cadeira que se pretende que seja de nível introdutório. Assim, nesta cadeira, só se apresentarão os erros associados a medições sempre que estes possam ser obtidos de forma directa dos aparelhos de medida (sem contar com os erros do operador, erros estatísticos, etc). Os aparelhos de medida que iremos utilizar podem possuir escalas discretas (como é o caso dos aparelhos digitais, e.g., um relógio digital) ou escalas contínuas (como é o caso dos aparelhos analógicos, e.g., uma régua). Nestes dois casos o erro (máximo) do aparelho é diferente (ver tabela 1.3). Quando queremos escrever o valor de uma grandeza x que tenha sido medida uma vez e para a qual sabemos o erro de medição, então devemos fazê-lo da seguinte forma

$$(x \pm \Delta x) \text{ unidades} \tag{1.12}$$

onde Δx significa o erro associado à variável x e não a variação absoluta como anteriormente.

Para o estudante mais curioso e que queira aprofundar os seus conhecimentos sobre teoria de erros, podemos aconselhar os livros [P. Bevington 2002, Taylor 1997].

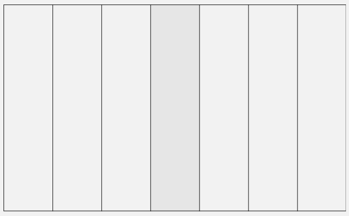
1.13 Precisão versus exactidão

Uma medição é precisa quando ao ser repetida os seus valores divergem pouco da média.

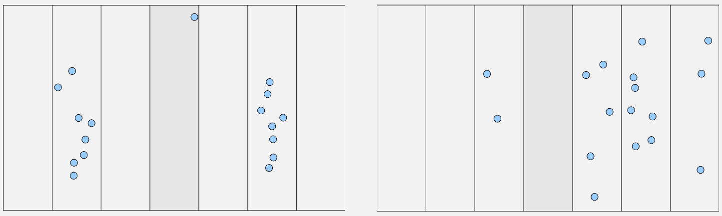
Uma medição é exacta quando a média de todas as medições coincide com o valor real dessa grandeza.

Em vez de medições podemos também falar em eventos e em vez de valores reais podemos falar em valores esperados. Vejamos o seguinte exercício.

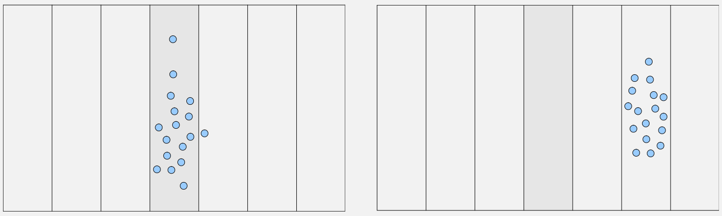
Exercício 1.24 Considere uma experiência onde vários atiradores de dardos têm como objectivo acertar num rectângulo central dos seus alvos. Os alvos estão divididos em vários rectângulos (ver figura).



A pontuação do atirador diminui à medida que este se afasta do rectângulo central. Compare em termos de precisão e de exactidão os seguintes gráficos referentes a vários atiradores de dardos



(a) (b)



(c) (d)

Solução: (a) exacto mas impreciso, (b) inexacto e impreciso, (c) exacto e preciso, (d) inexacto mas preciso.

1.14 Algarismos significativos (opcional)

Quando medimos qualquer grandeza física existe sempre uma incerteza na sua medição. Quando indicamos essa medição podemos indicar expressamente a incerteza (que é normalmente o erro de medição) ou podemos omitir essa informação. Se omitirmos estamos no fundo a dizer que existe um erro implícito associado. O erro implícito é metade da menor unidade representável. Por exemplo, se comprarmos uma garrafa de água que indica um volume de $1\,\mathrm{l}$ está subentendido que o volume da garrafa está dentro do intervalo $(1 \pm 0,5)\ \mathrm{l}$. Se por outro lado a garrafa indicar $1,0\,\mathrm{l}$ então subentende-se que o volume está dentro do intervalo $(1,0 \pm 0,05)\ \mathrm{l}$. No primeiro caso dizemos que o volume da garrafa tem um algarismo significativo, no segundo dizemos que tem dois algarismos significativos.

Aquando de uma medição consideram-se algarismos significativos todos aqueles que são obtidos directamente do aparelho de medida excepto os algarismos que:

- não têm significado físico;
- cuja única função é indicar qual é a ordem de grandeza do número;
- que variam continuamente durante a medição.

Imaginemos que queremos medir o comprimento de uma secretária. Poderei fazê-lo recorrendo a uma fita métrica. A fita métrica pode estar graduada em milímetros. Vamos supor que a medição obtida na fita é de $77,8\,\mathrm{cm}$. Nesse caso, podemos dizer que a medição é de $(77,80 \pm 0.05)\ \mathrm{cm}$ (acrescenta-se um zero à medição para ser coerente com o n$^{\mathrm{o}}$ de casas decimais do erro). Se tivéssemos omitido o erro estaríamos implicitamente a dizer que o erro nesta medição era de $\frac{0,1\,\mathrm{cm}}{2} = 0,05\,\mathrm{cm} = 0,5\,\mathrm{mm}$.

Vemos assim que os erros de medição e os algarismos significativos são dois assuntos que estão intimamente ligados. Nesta secção vamos apenas referir algumas regras básicas que devemos observar aquando de operaçãos matemáticas com números que têm uma incerteza associada.

1.14.1 Mutiplicação e divisão

Quando dois ou mais números são mutiplicados ou divididos, o resultado final deve ser apresentado com um número de algarismos significativos igual ao número de algarismos significativos do número que tem menor número de algarismos significativos.

Exercício 1.25 Calcule $1,23 \times 2,1$.

Resolução: $1,23 \times 2,1 = 2,583 \approx 2,6$.

1.14.2 Adição e subtracção

Quando dois ou mais números são adicionados ou subtraídos, o número de casas decimais no resultado final deve ser igual ao número de casas decimais do número que tem menos casas decimais de entre os números sobre os quais foram feitas as operações.

Exercício 1.26 Calcule $1,23 + 2,1$.

Resolução: $1,23 + 2,1 = 3,33 \approx 3,3$.

1.15 Escalares e vectores

Existem dois tipos de grandezas físicas: grandezas escalares e grandezas vectoriais.

Uma grandeza escalar é uma grandeza que possui apenas magnitude (também se pode dizer intensidade). Como exemplos de grandezas escalares temos: a massa, o tempo, a temperatura, a distância, a celeridade, a densidade, etc. Algumas destas grandezas serão estudadas nos capítulos subsequentes.

Para definir algumas grandezas físicas não é suficiente referir apenas a sua magnitude, é também necessário especificar uma direcção e sentido, estas grandezas chamam-se grandezas vectoriais. Assim surge o conceito de vector. Um vector é uma grandeza que para além da magnitude possui também direcção e sentido. Como exemplos de quantidades vectoriais temos: o deslocamento, a velocidade, a aceleração, a força, etc. Na maioria dos textos impressos, como é o caso desta sebenta, os vectores são denotados por caracteres direitos e a negrito, e.g., $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ (nem sempre iremos utilizar esta notação). No entanto, no caso de manuscritos, substitui-se o negrito por uma seta por cima, e.g., $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$.

1.15.1 Representação gráfica de um vector

Qualquer vector pode ser representado graficamente através de uma seta. O comprimento da seta é proporcional à magnitude da grandeza vectorial. A direcção e o sentido da seta representam a direcção e o sentido da grandeza vectorial. Por exemplo, vamos supor que se pretende representar uma grandeza física vectorial $\mathbf{F}$ cuja intensidade é $50\,\mathrm{N}$ (N é o símbolo que representa a unidade de força do SI que é o newton e que será estudada no capítulo (2)), que actua numa direcção que forma um ângulo de $30\,^\circ$ com o semi-eixo positivo dos x's (assumindo um sistema de eixos xy). Para representarmos o vector $\mathbf{F}$ começamos por desenhar o sistema de eixos. Depois, necessitamos de especificar uma escala, isso torna-se mais fácil se o sítio onde se quiser representar tiver divisões, e.g., papel milimétrico, papel quadriculado, etc. No caso de não ter divisões cabe-nos a nós assegurar uma escala apropriada. No nosso caso, queremos representar uma força de $50\,\mathrm{N}$, assim podemos utilizar uma escala onde cada cm corresponde a $10\,\mathrm{N}$, basta agora desenhar uma seta com $5\,\mathrm{cm}$ de comprimento e orientada por forma a fazer um ângulo de $30\,^\circ$ com o semi-eixo positivo dos x's. A nossa representação gráfica está ilustrada na figura 1.1.

1.15.2 Componentes e norma de um vector

Se desenharmos um vector a partir da origem de um sistema de coordenadas, tanto o seu comprimento como a sua direcção e sentido são determinados especificando as coordenadas do ponto da extremidade do vector. Por exemplo, na secção 1.15.1 representámos um vector sabendo a sua intensidade e direcção e sentido, também o podíamos ter feito sabendo as suas componentes.

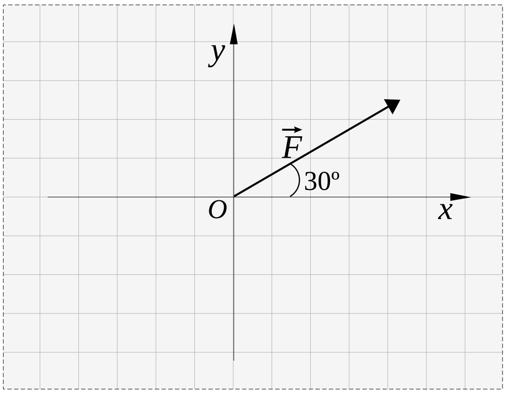


Figura 1.1: Representação gráfica do vector $\mathbf{F}$.

Para obter as componentes dum vector recorremos a funções trigonométricas, nomeadamente às funções seno (representa-se por sen ou $\sin$) e coseno (representa-se por $\cos$).

De uma forma geral, para qualquer vector $\mathbf{A}$ com componentes $(A_x; A_y)$ temos as seguintes relações[8]

$$A_x = A\cos\theta; \qquad A_y = A\sin\theta \tag{1.13}$$

Da definição acima conclui-se também que

$$A_x^2 + A_y^2 = A^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = A^2$$

Ou seja, a magnitude A, dum vector $\mathbf{A}$ define-se como[9]

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \tag{1.14}$$

Utilizam-se mais usualmente norma ou módulo de um vector para designar a sua magnitude.

Voltando ao caso particular do vector $\mathbf{F}$ de intensidade $50\,\mathrm{N}$ (da secção anterior), as suas componentes são

$$F_x = 50 \times \cos 30^\circ \approx 43,3; \qquad F_y = 50 \times \sin 30^\circ = 25,0$$

Podemos então escrever $\mathbf{F} = (43,3; 25,0)\ \mathrm{N}$.

1.15.3 Adição de vectores pelo método analítico

A adição de vectores é a operação matemática pela qual dois vectores $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ ao serem adicionados formam um terceiro vector $\mathbf{R}$ (vector resultante) que é o vector soma de $\mathbf{A}$ com $\mathbf{B}$. Este conceito é obviamente extensível a mais do que dois vectores. Saliente-se que uma subtração pode ser feita utilizando a adição do vector simétrico.

[8]Vale a pena recordar as seguintes relações: $\sin\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$; $\cos\theta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$. No círculo trigonométrico, o seno de um ângulo qualquer corresponde à projeção do seu raio (por definição igual a 1) sobre o eixo vertical, de forma semelhante, o cosseno de um ângulo qualquer corresponde à projeção do seu raio (1) sobre o eixo horizontal.

[9]Através do teorema de Pitágoras também se poderia obter facilmente o mesmo resultado.

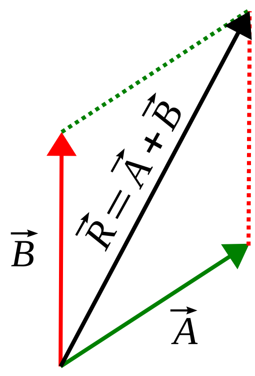


Figura 1.2: Método do paralelogramo.

Sabendo as componentes dos vectores que pretendemos adicionar torna-se fácil fazer essa operação de forma analítica.

Exercício 1.27 Considere os vectores $\mathbf{A} = (2;4)$ e $\mathbf{B} = (5;7)$. Determine as componentes do vector soma $\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ e do vector diferença $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$.

Resolução: $\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (2;4) + (5;7) = (2+5;4+7) = (7;11)$. $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) = (2;4) + (-5;-7) = (2-5;4-7) = (-3;-3) = \overbrace{-3\,(1;1)}^{\text{opcional}}$.

1.15.4 Adição de vectores pelo método gráfico

Para adicionar vectores graficamente, existem dois métodos muito usados: o método do paralelogramo e o método do polígono, vamos ver em que consistem.

Método do paralelogramo

Seja $\mathbf{R}$ o vector resultante da adição de dois vectores $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, i.e., $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$. Os dois vectores $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são desenhados como os lados de um paralelogramo, e o vector resultante $\mathbf{R}$ é a diagonal do paralelogramo, como se mostra na figura 1.2.

Método do polígono

Este método pode ser visto como uma extensão do método do paralelogramo e é especialmente útil quando temos três ou mais vectores. Começa-se por desenhar, num qualquer ponto conveniente, à escala e nas direcções correctas cada seta vectorial por sua vez. A ordem é irrelevante uma vez que a adição (e subtracção) de vectores é comutativa. A cauda de cada seta é posicionada na ponta da seta precedente, como se mostra na figura 1.3. O vector $\mathbf{R}$ resultante é representado por uma seta com a sua cauda no ponto inicial e a sua ponta na ponta do último vector adicionado. Também na figura 1.3 mostra-se que a adição é comutativa.

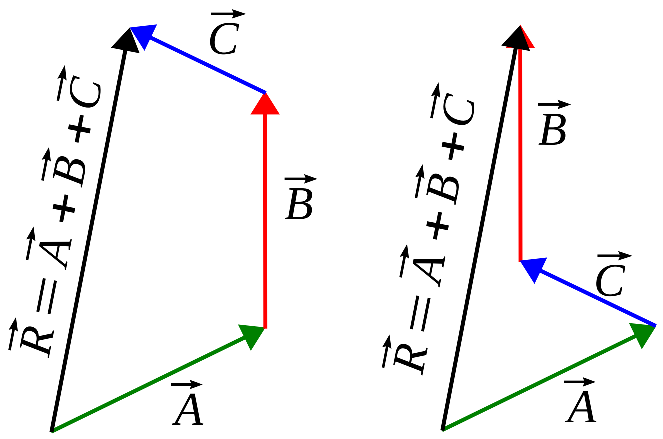
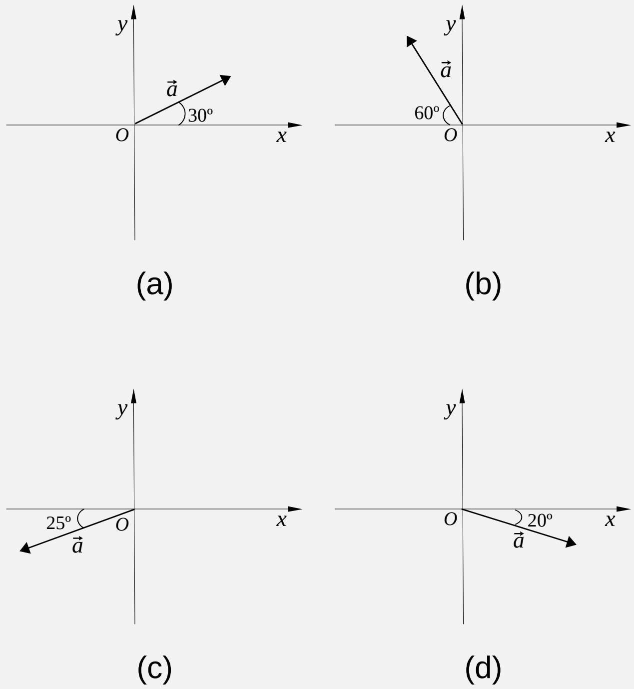


Figura 1.3: Método do polígono.

Exercício 1.28 Sabendo que o módulo do vector $\vec{a}$ representado na figura é igual a 10.00, escreva a expressão e o valor das componentes a_x e a_y para cada um dos casos.



Resolução:

Nesta resolução utilizamos sempre ângulos inferiores a $90\,^\circ$ e adicionamos sinais negativos quando as componentes assim o exigem. Vejamos:

$$\text{(a):}\ \begin{cases} \cos 30\,^\circ = \frac{a_x}{a} \longrightarrow a_x = a\cos 30\,^\circ = 10.00\cos 30\,^\circ = 8.66 \\ \sin 30\,^\circ = \frac{a_y}{a} \longrightarrow a_y = a\sin 30\,^\circ = 10.00\sin 30\,^\circ = 5.00 \end{cases}$$

$$\text{(b):}\ \begin{cases} \cos 60\,^\circ = \frac{-a_x}{a} \longrightarrow a_x = -a\cos 60\,^\circ = -10.00\cos 60\,^\circ = -5.00 \\ \sin 60\,^\circ = \frac{a_y}{a} \longrightarrow a_y = a\sin 60\,^\circ = 10.00\sin 60\,^\circ = 8.66 \end{cases}$$

(c): $\begin{cases} \cos 25\,^\circ = \frac{-a_x}{a} \longrightarrow a_x = -a\cos 25\,^\circ = -10.00\cos 25\,^\circ = -9.06 \\ \sin 25\,^\circ = \frac{-a_y}{a} \longrightarrow a_y = -a\sin 25\,^\circ = -10.00\sin 25\,^\circ = -4.23 \end{cases}$

(d): $\begin{cases} \cos 20\,^\circ = \frac{a_x}{a} \longrightarrow a_x = a\cos 20\,^\circ = 10.00\cos 20\,^\circ = 9.40 \\ \sin 20\,^\circ = \frac{-a_y}{a} \longrightarrow a_y = -a\sin 20\,^\circ = -10.00\sin 20\,^\circ = -3.42 \end{cases}$

Resolução alternativa: Outra forma de encontrarmos as componentes, consiste em considerar os ângulos tal como são:

(a): $\begin{cases} a_x = 10.00\cos 30\,^\circ = 8.66 \\ a_y = 10.00\sin 30\,^\circ = 5.00 \end{cases}$

(b): $\begin{cases} a_x = 10.00\cos 120\,^\circ = 10.00\cos\left(-240\,^\circ\right) = -5.00 \\ a_y = 10.00\sin 120\,^\circ = 10.00\sin\left(-240\,^\circ\right) = 8.66 \end{cases}$

(c): $\begin{cases} a_x = 10.00\cos 205\,^\circ = 10.00\cos\left(-155\,^\circ\right) = -9.06 \\ a_y = 10.00\sin 205\,^\circ = 10\sin .00\left(-155\,^\circ\right) = -4.23 \end{cases}$

(d): $\begin{cases} a_x = 10.00\cos\left(-20\,^\circ\right) = 9.40 \\ a_y = 10.00\sin\left(-20\,^\circ\right) = -3.42 \end{cases}$

Capítulo 2

Mecânica

A mecânica é a parte da física que analisa o movimento dos corpos. De uma forma geral a mecânica está subdividida em três partes:

- A cinemática onde se descreve os movimentos sem se preocupar com as suas causas.
- A dinâmica onde se estuda a relação entre a força e movimento (ou seja, são estudadas as causas dos movimentos, ao contrário da cinemática).
- A estática onde se estuda sistemas sob a ação de forças que se equilibram.

2.1 Conceitos introdutórios

Ponto material Um corpo é chamado ponto material quando as suas dimensões não interferem no estudo de um determinado fenómeno.

Referencial Um corpo está em movimento relativamente a um outro, que se toma para termo de comparação, quando a sua posição em relação a este muda ao longo do tempo. O corpo escolhido como termo de comparação chama-se referencial ou sistema de referência.

Movimento e repouso Um ponto material está em repouso em relação a um referencial quando a sua posição, em relação a esse referencial, não se altera ao longo do tempo.

Um ponto material está em movimento em relação a um referencial quando a sua posição, em relação a esse referencial, se altera ao longo do tempo.

Movimento e repouso são conceitos relativos, dependem do referencial adotado.

Móvel Um móvel é qualquer corpo que muda de posição no decorrer do tempo em relação a um determinado referencial adotado.

Trajectória Trajectória de um móvel é o conjunto de posições ocupadas por ele durante o seu movimento em relação a um referencial.

Intervalo de tempo A duração definida por dois instantes de tempo é chamada intervalo de tempo.

O intervalo de tempo entre os instantes t_i e t_f é dado por

$$\Delta t = t_f - t_i \tag{2.1}$$

Espaço percorrido A distância total percorrida por um móvel durante o seu trajecto designa-se por espaço percorrido.

Deslocamento Quando uma partícula muda de posição, diz-se que sofre um deslocamento $\Delta\mathbf{r}$, o qual é definido pela diferença entre a posição final e a posição inicial

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i \tag{2.2}$$

No caso do movimento ao longo de um eixo. O sinal do deslocamento dá o sentido em que ocorre o movimento tendo em atenção a orientação do eixo. Quando o sinal do deslocamento é positivo, a partícula desloca-se no sentido positivo do eixo. Se o sinal é negativo, o movimento dá-se no sentido negativo do eixo.

Vale a pena salientar que o deslocamento é independente da distância realmente percorrida e que, ao contrário do espaço percorrido, é uma grandeza vectorial.

Velocidade média A razão entre o deslocamento $\Delta\mathbf{r}$ e o intervalo de tempo Δt em que o deslocamento ocorre

$$\mathbf{v}_m = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \tag{2.3}$$

Celeridade média A razão entre a distância percorrida[1] pela partícula e o intervalo de tempo em que essa distância é percorrida

$$c_m = \frac{\text{distância percorrida}}{\Delta t} \tag{2.4}$$

Velocidade A velocidade (também designada por velocidade instantânea) de uma partícula num dado instante é a taxa de variação da sua posição com o tempo nesse instante. A velocidade v é obtida a partir da velocidade média considerando o seguinte limite

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \mathbf{v}_m = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \tag{2.5}$$

[1] À distância percorrida também é usual chamar-se espaço percorrido.

A velocidade num dado instante é, portanto, a derivada da função $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ que dá a variação da posição com o tempo.

Geometricamente, a velocidade num dado instante é igual ao declive da recta tangente à curva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ nesse instante.

Celeridade Ao módulo da velocidade chama-se celeridade. A celeridade é, pois, uma velocidade a que foi retirada a informação relativa ao sentido do movimento. O velocímetro de um automóvel mede a celeridade, e não a velocidade, porque não pode determinar o sentido do movimento.

Aceleração Quando a velocidade de uma partícula varia com o tempo, dizemos que a partícula tem aceleração. A **aceleração média** de uma partícula no intervalo de tempo Δt é definida pela expressão

$$\mathbf{a}_m = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \tag{2.6}$$

A **aceleração instantânea** (ou simplesmente **aceleração**) de uma partícula num dado instante é a taxa de variação da sua velocidade com o tempo nesse instante. A aceleração instantânea $\mathbf{a}$ é obtida a partir da aceleração média considerando o seguinte limite

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \mathbf{a}_m = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \tag{2.7}$$

A aceleração num dado instante é, portanto, a derivada da função $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ que dá a variação da velocidade com o tempo. Geometricamente, a aceleração num dado instante é igual ao declive da recta tangente à curva $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ nesse instante.

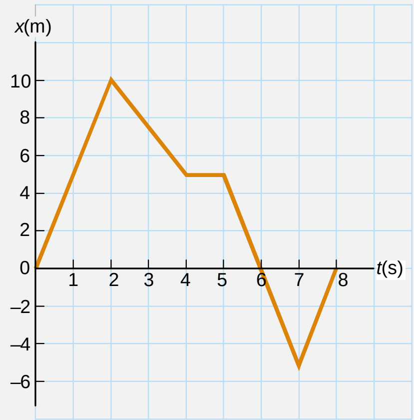
Movimento uniforme O movimento de uma partícula diz-se uniforme quando o valor da velocidade não se altera com o tempo, isto é, quando v é constante.

Exercício 2.1 A posição de uma partícula em função do tempo é dada por $x = 0.2t^3 + 0.5t^2 + 0.5$ (SI). Determine a posição em $t = 2\,\mathrm{s}$ e $t = 3\,\mathrm{s}$.

Resolução:

$$\begin{aligned} x(2\,\mathrm{s}) &= 0.2\,(2)^3 + 0.5\,(2)^2 + 0.5 = 4.1\,\mathrm{m} \\ x(3\,\mathrm{s}) &= 0.2\,(3)^3 + 0.5\,(3)^2 + 0.5 = 10.4\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Exercício 2.2 O gráfico posição-tempo de uma partícula que se move ao longo do eixo dos x's é apresentado na figura. Calcule a velocidade média e a celeridade média da partícula nos intervalos de tempo (a) $[0,2]$ s, (b) $[4,7]$ s, (c) $[0,8]$ s.



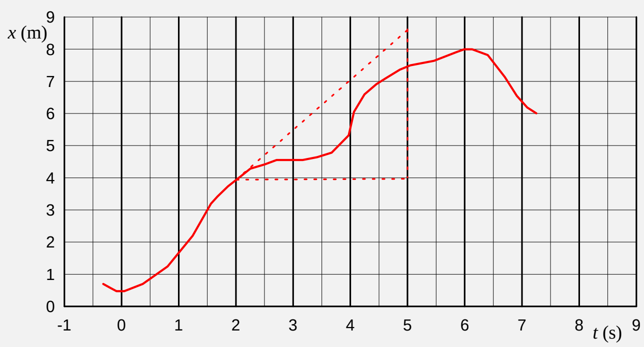
Resolução:

$$
\begin{aligned}
&(a) : v_m = \frac{10\,\mathrm{m} - 0}{2\,\mathrm{s} - 0} = 5\,\mathrm{m\,s^{-1}}; \qquad c_m = \frac{10\,\mathrm{m}}{2\,\mathrm{s} - 0} = 5\,\mathrm{m\,s^{-1}} \\
&(b) : v_m = \frac{-5\,\mathrm{m} - 5\,\mathrm{m}}{7\,\mathrm{s} - 4\,\mathrm{s}} = -3.3\,\mathrm{m\,s^{-1}}; \qquad c_m = \frac{5\,\mathrm{m} + 5\,\mathrm{m}}{7\,\mathrm{s} - 4\,\mathrm{s}} = 3.3\,\mathrm{m\,s^{-1}} \\
&(c) : v_m = \frac{0 - 0}{8\,\mathrm{s} - 0} = 0; \qquad c_m = \frac{10\,\mathrm{m} + 5\,\mathrm{m} + 10\,\mathrm{m} + 5\,\mathrm{m}}{8\,\mathrm{s} - 0} = \frac{30\,\mathrm{m}}{8\,\mathrm{s}} = 3.75\,\mathrm{m\,s^{-1}}
\end{aligned}
$$

Exercício 2.3 A curva representada na figura dá a posição de uma partícula em função do tempo.

(a) Calcule a velocidade instantânea da partícula no instante $t = 2\,\mathrm{s}$.

(b) Quando é que a velocidade é: (i) máxima? (ii) zero? (iii) negativa?



Resolução:

(a) A velocidade da partícula no instante $t = 2\,\mathrm{s}$ é igual ao declive da recta tangente à curva $x = x(t)$ no instante $t = 2\,\mathrm{s}$, $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{8.5\,\mathrm{m} - 4\,\mathrm{m}}{5\,\mathrm{s} - 2\,\mathrm{s}} = 1.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

Também poderíamos obter a velocidade recorrendo ao intervalo de $2\,\mathrm{s}$ a $4\,\mathrm{s}$:

$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{7\,\mathrm{m} - 4\,\mathrm{m}}{4\,\mathrm{s} - 2\,\mathrm{s}} = \frac{3}{2}\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 1,5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Ou recorrendo ao intervalo de $2\,\mathrm{s}$ a $3\,\mathrm{s}$:

$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{5{,}5\,\mathrm{m} - 4\,\mathrm{m}}{3\,\mathrm{s} - 2\,\mathrm{s}} = 1,5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

(b) A velocidade é máxima quando $t \approx 4\,\mathrm{s}$ porque neste instante o declive da recta tangente à curva $x = x(t)$ é máximo; a velocidade é zero nos instantes $t = 0$ e $t = 6\,\mathrm{s}$, porque nestes instantes o declive da recta tangente à curva $x = x(t)$ é zero; velocidade é negativa para $t < 0$ e $t > 6\,\mathrm{s}$ porque nestes intervalos de tempo o declive da recta tangente à curva $x = x(t)$ é negativo.

2.2 Movimento rectilíneo

Quando o movimento de um ponto material ocorre ao longo de uma direcção fixa dizemos que o movimento é rectilíneo.

lei do movimento uniforme

$$\begin{aligned} v &= v_0 \\ x &= x_0 + v_0 t \end{aligned}$$

lei do movimento uniformemente variado

$$\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \end{aligned}$$

Exercício 2.4 A velocidade de uma partícula em função do tempo é dada por $v(t) = 2t - 2$ (SI). Calcule a velocidade e a celeridade da partícula no instante $t = 0.5\,\mathrm{s}$.

Resolução:

$$t = 0.5\,\mathrm{s} : v = 2(0.5) - 2 = -1\,\mathrm{m\,s^{-1}}; \qquad c = |v| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Exercício 2.5 Um comboio realiza movimento rectilíneo com uma velocidade de módulo $280\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. A que distância da estação deverá o maquinista começar a travar para que o comboio pare na estação, supondo que a travagem proporciona uma desaceleração constante de módulo $2\,\mathrm{m\,s^{-2}}$?

Resolução:

$$x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}at^2 \rightarrow \Delta x = x - x_0 = v_0 t - \frac{1}{2}at^2$$

$$v = v_0 - at \Leftrightarrow 0 = v_0 - at \Leftrightarrow t = \frac{v_0}{a}$$

$$\Delta x = v_0 \left(\frac{v_0}{a}\right) - \frac{1}{2}a\left(\frac{v_0}{a}\right)^2 = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{\left(280\,\mathrm{km\,h^{-1}}\right)^2}{2\left(2\,\mathrm{m\,s^{-2}}\right)}$$

$$\frac{\left(280\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \times \frac{1000\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{km}} \times \frac{1\,\mathrm{h}}{3600\,\mathrm{s}}\right)^2}{4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 1512.345\,7\,\mathrm{m}$$

$$= 1512.3\,\mathrm{m} \approx 1.5\,\mathrm{km}.$$

2.3 Movimento curvilíneo (opcional)

O movimento de uma partícula diz-se curvilíneo quando a trajectória descrita pela partícula é uma linha curva. Como exemplos de trajectórias curvilíneas podemos referir as seguintes: trajectória circular descrita por um ponto da jante de um automóvel; trajectória parabólica descrita por uma bala disparada por uma arma com o cano alinhado segundo a direcção horizontal; trajectória elíptica descrita pela Terra em torno do Sol.

No movimento curvilíneo, o vector velocidade é em cada instante tangente à trajectória e o seu sentido é o do movimento.

Por falta de tempo não iremos aprofundar este tópico

2.4 Leis de Newton

- Primeira lei de Newton (lei da inércia): Se um ponto material não está sujeito à acção de qualquer força, então a velocidade do ponto material não pode variar; o ponto material não pode acelerar.

- Segunda lei de Newton (lei fundamental da dinâmica): a força resultante sobre um corpo é igual ao produto da massa do corpo pela aceleração do corpo, isto é,

$$\mathbf{F}_r = m\mathbf{a} \tag{2.8}$$

- Terceira lei de Newton (lei da acção-reacção): quando dois corpos interactuam um com o outro, as forças que actuam sobre os corpos têm o mesmo módulo, a mesma direcção, sentidos opostos, e os pontos de aplicação estão em corpos diferentes. As forças que actuam entre dois corpos em interacção constituem um par acção-reacção.

Exercício 2.6 Classifique como verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações: (a) Um objecto pode estar em movimento sem estar sujeito à acção de forças; (b) Um objecto pode estar em repouso quando sujeito à acção de forças.

Solução: (a) e (b) verdadeiras.

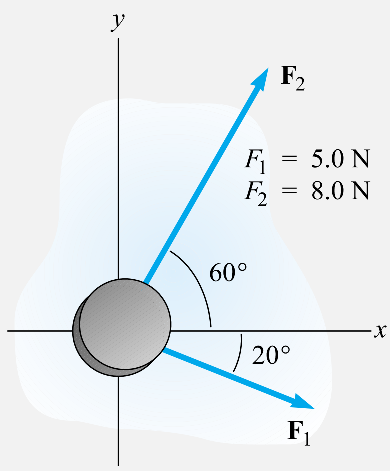
Exercício 2.7 Um objecto move-se sem aceleração. Classifique como verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações: (a) O objecto está sujeito à acção de uma única força; (b) Não actuam forças no objecto; (c) Se actuam forças no objecto, a força resultante é nula.

Solução: (a) e (b) falsa; (c) verdadeira.

Exercício 2.8 Um objecto sujeito à acção de várias forças tem movimento acelerado. Qual das seguintes afirmações é sempre verdadeira? (a) O objecto move-se no sentido da força resultante. (b) A aceleração tem o mesmo sentido do que a velocidade. (c) A aceleração tem o mesmo sentido do que a força resultante. (d) A celeridade do objecto aumenta.

Solução: (c).

Exercício 2.9 Um disco de massa $0.30\,\mathrm{kg}$ desliza ao longo de uma superfície lisa horizontal. Num dado instante é actuado por duas forças conforme está ilustrado na figura. Determine o módulo e a direcção da aceleração adquirida pelo disco.



Resolução:

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \vec{F_1} + \vec{F_2} = (F_{1x} + F_{2x}; F_{1y} + F_{2y}) \\
&= (F_1 \cos(-20\,^\circ) + F_2 \cos(60\,^\circ)\,; F_1 \sin(-20\,^\circ) + F_2 \sin(60\,^\circ)) \\
&= ((5.0\,\mathrm{N}) \cos(-20\,^\circ) + (8.0\,\mathrm{N}) \cos(60\,^\circ)\,; (5.0\,\mathrm{N}) \sin(-20\,^\circ) + (8.0\,\mathrm{N}) \sin(60\,^\circ)) \\
&= (8.7; 5.2)\ \mathrm{N}
\end{aligned}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{(8.7; 5.2)\ \mathrm{N}}{0.30\,\mathrm{kg}} = (29.0; 17.3)\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

Nota: Uma notação alternativa é:

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (F_{1x} + F_{2x})\,\vec{e}_x + (F_{1y} + F_{2y})\,\vec{e}_y \\
&= [F_1 \cos(-20\,°) + F_2 \cos(60\,°)]\,\vec{e}_x + [F_1 \sin(-20\,°) + F_2 \sin(60\,°)]\,\vec{e}_y \\
&= [(5.0\,\mathrm{N}) \cos(-20\,°) + (8.0\,\mathrm{N}) \cos(60\,°)]\,\vec{e}_x \\
&\quad + [(5.0\,\mathrm{N}) \sin(-20\,°) + (8.0\,\mathrm{N}) \sin(60\,°)]\,\vec{e}_y \\
&= (8.7\vec{e}_x + 5.2\vec{e}_y)\ \mathrm{N}
\end{aligned}$$

O módulo da aceleração:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(29.0\,\mathrm{m\,s^{-2}})^2 + (17.3\,\mathrm{m\,s^{-2}})^2} = 33.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

A direção pode ser obtida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\tan\theta &= \frac{a_y}{a_x} = \frac{17.3\,\mathrm{m\,s^{-2}}}{29.0\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 0.6 \\
&\Rightarrow \theta = \arctan(0.6) = 0.540420\,\mathrm{rad} = 30.9638 \approx 31\,°
\end{aligned}$$

Exercício 2.10 Um corpo adquire uma aceleração de módulo $3.75\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ quando sujeito às forças $\vec{F}_1 = (-2.00\vec{e}_x + 2.00\vec{e}_y)\,\mathrm{N}$, $\vec{F}_2 = (5.00\vec{e}_x - 3.00\vec{e}_y)\,\mathrm{N}$ e $\vec{F}_3 = (-45.0\vec{e}_x)\,\mathrm{N}$.

(a) Qual é a direcção da aceleração?

(b) Qual é a massa do corpo?

(c) Se o corpo estava inicialmente em repouso. Calcule para o instante $t = 10.0\,\mathrm{s}$:

  i. A celeridade do corpo.

  ii. A velocidade do corpo.

Resolução:

(a) $\vec{F}_r = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = [(-2.00 + 5.00 - 45.0)\vec{e}_x + (2.00 - 3.00)\vec{e}_y]\ \mathrm{N} = (-42.0\vec{e}_x - \vec{e}_y)\,\mathrm{N}$

$\vec{F}_r = m\vec{a} : \tan\theta = \frac{F_{ry}}{F_{rx}} = \frac{1}{42.0} = 2.38 \times 10^{-2} \Rightarrow \theta = \arctan\left(2.38 \times 10^{-2}\right)$

$\theta = \arctan\left(2.38 \times 10^{-2}\right) = 2.37955 \times 10^{-2}\,\mathrm{rad} = 1.36338\,° \approx 1.36\,°$

Como este ângulo se encontra no terceiro quadrante o ângulo em relação ao semi-eixo positivo do x's é: $180\,° + 1.36\,° = 181.36\,°$

Ou seja, a força resultante e, por conseguinte, a aceleração formam um ângulo de $181.36\,°$ com o semi-eixo positivo dos x's.

Nota: $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}}{\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$. Se quisermos saber o ângulo correspondente usamos a função inversa (arco tangente).

(b) $m = \frac{F_R}{a} = \frac{\sqrt{F_{Rx}^2+F_{Ry}^2}}{a} = \frac{\sqrt{(-42.0\,\mathrm{N})^2+(-1.0\,\mathrm{N})^2}}{3.75\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 11.2\,\mathrm{kg}$

i. $v = v_0 + at : v = 0 + \left(3.75\,\mathrm{m\,s^{-2}}\right)(10.0\,\mathrm{s}) = 37.5\,\mathrm{m\,s^{-1}} \longrightarrow c = |v| = 37.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

ii. $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t = 0 + \frac{\vec{F}_R}{m}t = \frac{(-42.0\vec{e}_x - \vec{e}_y)\,\mathrm{N}}{11.2\,\mathrm{kg}}(10.0\,\mathrm{s}) = -(37.5\vec{e}_x + 0.89\vec{e}_y)\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

2.5 Lei da gravitação universal

Qualquer partícula atrai qualquer outra partícula com uma força gravítica cujo valor F é dado por

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \tag{2.9}$$

sendo m_1 e m_2 as massas dos corpos, r_{12} a distância entre eles e G uma constante denominada constante de gravitação, cujo valor é

$$\begin{aligned} G &= 6.67259\times10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}} \\ &\approx 6.67\times10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}} \end{aligned}$$

A partícula m_2 atrai a partícula m_1 com uma força gravítica F e a partícula m_1 atrai a partícula m_2 com uma força gravítica $-F$; as forças F e $-F$ constituem um par acção-reacção.

Embora a lei da gravitação de Newton diga respeito a partículas, ela também se aplica a corpos cujas dimensões não podem ser desprezadas.

Por exemplo, considere-se uma maçã a cair de uma macieira, a Terra pode ser considerada como uma partícula de massa igual à da Terra e que se enconta no centro da Terra; neste caso a distância entre as partículas é igual ao raio da Terra[2].

Exercício 2.11 Calcule o valor da força gravítica entre o protão e o electrão no átomo de hidrogénio, tendo em conta os seguintes valores: massa do electrão, $m_e = 9\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$; massa do protão, $m_p = 2\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$; raio da órbita do electrão, $r = 5\times10^{-11}\,\mathrm{m}$.

[2] Este resultado é devido a um teorema (teorema da camada de Newton), provado por Newton, que afirma: uma camada esférica uniforme de matéria atrai uma partícula que se encontre no seu exterior como se toda a massa da camada estivesse concentrada no seu centro.

Resolução:

$$\begin{aligned} F &= G\frac{m_e m_p}{r^2} = \frac{\left(6.67\times10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}\right)\left(9\times10^{-31}\,\mathrm{kg}\right)\left(2\times10^{-27}\,\mathrm{kg}\right)}{\left(5\times10^{-11}\,\mathrm{m}\right)^2} \\ &= 4.8\times10^{-47}\,\mathrm{N}. \end{aligned}$$

Exercício 2.12 (opcional) A distância entre o centro da Terra e o centro da Lua é $3.9\times10^5\,\mathrm{km}$, sendo as massas dos planetas, respectivamente, $6.0\times10^{24}\,\mathrm{kg}$ e $7.3\times10^{22}\,\mathrm{kg}$. Determine a que distância do centro da Lua deve encontrar-se um satélite para que seja nula a resultante das forças gravitacionais a que este está sujeito.

Resolução:

$F_{LS} = F_{TS} \longrightarrow \frac{GM_LM_S}{d_{LS}^2} = \frac{GM_TM_S}{d_{TS}^2} \longrightarrow \frac{M_L}{d_{LS}^2} = \frac{M_T}{d_{TS}^2} \longrightarrow \frac{M_L}{M_T} = \frac{d_{LS}^2}{d_{TS}^2} \longrightarrow \sqrt{\frac{M_L}{M_T}} = \frac{d_{LS}}{d_{TS}} \longrightarrow d_{LS} = d_{TS}\sqrt{\frac{M_L}{M_T}}$

Uma vez que $d_{TS} = d_{LT} - d_{LS}$ ficamos com $d_{LS} = (d_{LT} - d_{LS})\sqrt{\frac{M_L}{M_T}} \longrightarrow d_{LS}\left(1+\sqrt{\frac{M_L}{M_T}}\right) = d_{LT}\sqrt{\frac{M_L}{M_T}} \longrightarrow d_{LS} = \frac{d_{LT}\sqrt{\frac{M_L}{M_T}}}{1+\sqrt{\frac{M_L}{M_T}}} = \frac{d_{LT}}{\sqrt{\frac{M_T}{M_L}}+1} = \frac{3.9\times10^5\,\mathrm{km}}{\sqrt{\frac{6.0\times10^{24}\,\mathrm{kg}}{7.3\times10^{22}\,\mathrm{kg}}}+1} = 3.874\,44\times10^4\,\mathrm{km} \approx 3.9\times10^4\,\mathrm{km}.$

2.5.1 Força gravítica

A força gravítica que actua num corpo é a força de atracção que a Terra exerce sobre ele. Esta força aponta para o centro da Terra. Se deprezarmos os efeitos da resistência do ar, a força gravítica $\mathbf{F}_g$ é a única força que actua num corpo em queda livre. Nestas condições, o corpo cai com uma aceleração $\mathbf{g}$, a aceleração gravítica. Designando por m a massa do corpo, a aplicação da segunda lei de Newton ao movimento do corpo, permite escrever

$$F_g = mg$$

Na superfície da Terra, em média, $g = 9{,}8\,\mathrm{m/\,s^2}$, logo um objecto de $1\,\mathrm{kg}$ pesa $9{,}8\,\mathrm{N}$ à superficie da Terra. Nota: Também se utiliza o termo peso, P, de um corpo para designar a força gravítica (se bem que exista uma diferença ainda que pequena entre as duas grandezas), i.e., $F_g \approx P$.

Exercício 2.13 Calcule o valor da massa da Terra, tendo em atenção o valor da aceleração gravítica num ponto pertencente à superfície terrestre. (Considere a Terra como uma esfera de raio $6370\,\mathrm{km}$.)

Resolução:

$\begin{cases} F_g = \frac{GMm}{r^2} \\ P = F_g = mg \end{cases} \longrightarrow \frac{GM}{r^2} = g \longrightarrow M = \frac{gr^2}{G} = \frac{9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}\times\left(6370\times10^3\,\mathrm{m}\right)^2}{6.67\times10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}} = 5.961\,82\times10^{24}\,\mathrm{kg} \approx 5.96\times10^{24}\,\mathrm{kg}.$

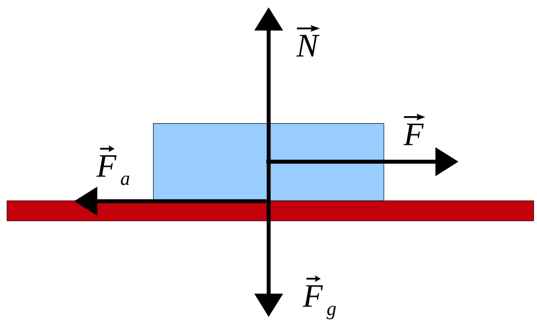


Figura 2.1: Um corpo sujeito à força de atrito.

2.5.2 Leis de Kepler (ver módulo de astronomia)

As leis de Kepler serão estudadas com maior detalhe no módulo de astronomia, são no entanto incluídas neste módulo de forma não exaustiva por forma a tornar este texto mais completo.

A primeira lei de Kepler, a lei das óbitas, afirrma que, todos os planetas descrevem órbitas elípticas, ocupando o Sol um dos focos dessas elipses.

A segunda lei de Kepler, a lei das áreas, afirma que, o raio vector que une o centro do Sol ao centro de qualquer planeta varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais, isto é, a taxa $\Delta A/\Delta t$ à qual a área é varrida é constante.

A terceira lei de Kepler, a lei dos períodos, afirma que, o quadrado do período de qualquer planeta é proporcional ao cubo do semi-eixo maior da sua sua órbita.

2.6 Força de atrito

Quando um corpo se desloca ao longo de uma superfície, o corpo perde velocidade devido a uma ligação entre o corpo e a superfície. A resistência que a superfície oferece ao movimento do corpo é descrita por uma força chamada força de atrito.

Quando se aplica ao corpo uma força $\mathbf{F}$ horizontal e o corpo não entra em movimento, isso significa que a força $\mathbf{F}$ é equilibrada por uma força de atrito estático $\mathbf{F}_{ae}$ que actua no corpo no sentido oposto ao de $\mathbf{F}$. Se aumentarmos o módulo de $\mathbf{F}$ e o corpo continuar em repouso, isso significa que o módulo de $\mathbf{F}_{ae}$ aumentou. Quando o módulo de $\mathbf{F}$ atinge um certo valor o corpo entra em movimento. Em relação à figura podemos notar o seguinte, em relação à vertical o objecto não se move, o que significa que $\mathbf{N}$ que representa reacção normal da superfície sobre o corpo é igual em módulo a $\mathbf{F}_g$, a força gravítica a que o corpo está sujeito, i.e., $N = mg$.

Assim, quando é aplicada uma força a um objecto que está em contacto com uma superfície podemos ter uma de três situações:

- Se o corpo não se move, então a força de atrito estático F_{ae} e a componente de $\mathbf{F}$ paralela à superfície equilibram-se.
$$F_{ae} = F$$

- Se o corpo está no limiar do escorregamento, mas mesmo assim não escorrega então a força de atrito é a força de atrito estático máxima
$$F_{ae\,\max} = \mu_e N$$
onde μ_e é o coeficiente de atrito estático.

- Se o corpo começa a deslizar ao longo da superfície, o módulo da força de atrito decresce rapidamente para um valor F_{ac} dado por
$$F_{ac} = \mu_c N \tag{2.10}$$
onde μ_c é o coeficiente de atrito cinético.

Vale a pena salientar que os coeficientes de atrito estático e cinético são adimensionais.

Exercício 2.14 Um corpo de $20\,\mathrm{kg}$ de massa está em repouso sobre uma superfície horizontal. O coeficiente de atrito estático entre o corpo e a superfície é 0.40 e o coeficiente de atrito cinético 0.20.

(a) Calcule o módulo da força de atrito se aplicarmos uma força horizontal de $50\,\mathrm{N}$ sobre o corpo.

(b) Qual é o módulo da força mínima que provoca o início do movimento do corpo?

(c) Qual é o módulo da força mínima que mantém o corpo em movimento, uma vez iniciado este?

(d) Se a força horizontal é de $100\,\mathrm{N}$, qual é o módulo da força de atrito?

Resolução:

(a) $F_{ae\,\max} = \mu_e mg = (0.40)(20\,\mathrm{kg})(9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}) = 78.4\,\mathrm{N}$

$F_{ac} = \mu_c mg = (0.20)(20\,\mathrm{kg})(9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}) = 39.2\,\mathrm{N}$

$F = 50\,\mathrm{N} \Rightarrow F_a = F = 50\,\mathrm{N}$

(b) $F_{\min}\,(\text{que provoca o início do movimento}) = F_{ae\,\max} = 78.4\,\mathrm{N}$

(c) $F_{\min}\,(\text{que mantém o corpo em movimento}) = F_{ac} = 39.2\,\mathrm{N}$

(d) $F = 100\,\mathrm{N} \Rightarrow F_a = F_{ac} = 39.2\,\mathrm{N}$

2.7 Trabalho

O trabalho realizado por uma força num corpo é o produto da força pela distância de que se deslocou o seu ponto de aplicação na direcção e sentido da força. Se uma força $\mathbf{F}$ actua de tal forma que o deslocamento $\mathbf{d}$ está numa direção que faz um ângulo θ com a direcção da força então, o trabalho realizado é dado por

$$W = F \times d \times \cos\theta, \tag{2.11}$$

Desta definição podemos concluir que se $\theta = 0$ então $W = F \times d$ e se $\theta = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}$ então $W = 0$. A unidade SI para o trabalho é o joule (J).

2.8 Energia

Energia é uma medida da capacidade de um sistema realizar trabalho. Tal como o próprio trabalho é medida em joules. A energia é classificada em duas formas: energia potencial, que é a energia armazenada num corpo ou num sistem em consequência da sua posição, forma ou estado (isto inclui energia gravitacional, energia eléctrica, energia nuclear e energia química); energia cinética é a energia associada ao movimento dum corpo (inclui energia cinética de translação e de rotação).

Por falta de tempo não iremos aprofundar este tópico.

2.9 Lei de Hooke

Um sistema de Hooke (uma mola, arame, barra, etc.) é aquele que retorna à sua configuração original depois de ser deformado e largado. Quando um sistema destes é esticado uma distância x (no caso de compressão x é negativo), a força restauradora exercida pela mola é dada pela Lei de Hooke:

$$F = -kx \tag{2.12}$$

O sinal menos indica que a força restauradora é sempre no sentido oposto ao deslocamento. A constante da mola k tem unidades $\mathrm{N/m}$ e é uma medida da rigidez da mola. A maior parte das molas obedece à Lei de Hooke desde que as deformações sejam pequenas. Por vezes é útil exprimir a Lei de Hooke em termos de F_{ext} a força externa necessária para esticar a mola numa determinada quantidade x. Esta força é simétrica da força restauradora, e portanto

$$F_{ext} = kx \tag{2.13}$$

2.10 Centro de massa

O centro de massa de um objecto (de massa m) é o ponto que se move da mesma maneira que uma massa pontual (de massa m) se moveria quando sujeita às mesmas forças externas que actuam sobre o objecto. Isto é, se a força resultante que actua num objecto (ou sistema de objectos) de massa m é F, a aceleração do centro de massa do objecto (ou sistema) é dada por

$$\mathbf{a}_{cm} = \frac{\mathbf{F}}{m} \tag{2.14}$$

Se um objecto é composto por pequenas massas m_1, m_2, $\cdots$, nas coordenadas (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), $\cdots$, então as coordenadas do centro de massa são dadas por

$$x_{cm} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i x_i}{m_i}, \qquad y_{cm} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i y_i}{m_i} \qquad z_{cm} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i z_i}{m_i} \tag{2.15}$$

onde os somatórios se estendem a todas as massas que compõem o objecto. Num campo gravitacional uniforme o centro de massa e o centro de gravidade coincidem.

Esta última equação pode ser escrita de uma forma mais simplificada

$$\mathbf{r}_{cm} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \mathbf{r}_i}{m_i} \tag{2.16}$$

onde $\mathbf{r}$ refere-se ao vector posição. De uma forma semelhante temos

$$\mathbf{v}_{cm} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \mathbf{v}_i}{m_i} \tag{2.17}$$

$$\mathbf{a}_{cm} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \mathbf{a}_i}{m_i} \tag{2.18}$$

Exercício 2.15 Duas esferas pequenas, que se consideram pontos materiais, uma com $1\,\mathrm{kg}$ e outra com $3\,\mathrm{kg}$, estão ligadas uma à outra por uma vareta com $1\,\mathrm{m}$ de comprimento. Determine a posição do centro de massa do sistema, se a vareta tiver:

(a) massa desprezável;

(b) $0.4\,\mathrm{kg}$, for homogénea e tiver secção constante.

Resolução: Vamos admitir que a vareta está alinhada com o eixo dos x's e que a esfera de massa $1\,\mathrm{kg}$ está na origem deste eixo.

(a) $\vec{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{(1\,\mathrm{kg})(0)+(3\,\mathrm{kg})(\vec{e}_x)\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{kg}+3\,\mathrm{kg}} = \left(\frac{3}{4}\vec{e}_x\right)\,\mathrm{m} = (0.75\vec{e}_x)\,\mathrm{m}$

Resolução alternativa (usando uma notação mais leve): $x_{CM} = \frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2} = \frac{(1\,\mathrm{kg})(0)+(3\,\mathrm{kg})(1\,\mathrm{m})}{(1+3)\,\mathrm{kg}} = 0.75\,\mathrm{m}$.

(b) $\vec{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2+m_3\vec{r}_3}{m_1+m_2+m_3} = \frac{(1\,\mathrm{kg})(0)+(3\,\mathrm{kg})(\vec{e}_x)\,\mathrm{m}+(0.4\,\mathrm{kg})(0.5\vec{e}_x)\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{kg}+3\,\mathrm{kg}+0.4\,\mathrm{kg}} = (0.73\vec{e}_x)\,\mathrm{m}$

Resolução alternativa (usando uma notação mais leve): $x_{CM} = \frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3} = \frac{(1\,\mathrm{kg})(0)+(3\,\mathrm{kg})(1\,\mathrm{m})+(0.4\,\mathrm{kg})(0.5\vec{e}_x)\,\mathrm{m}}{(1+3+0.4)\,\mathrm{kg}} = 0.73\,\mathrm{m}$.

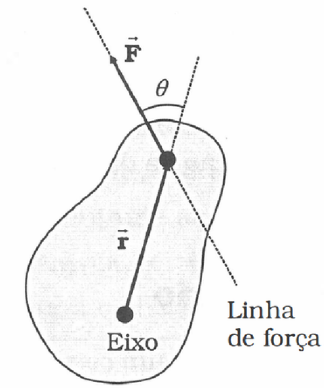


Figura 2.2: Momento de uma força.

Exercício 2.16 O pneu de um automóvel encontra-se desequilibrado porque o seu centro de massa está a $1\,\mathrm{mm}$ do eixo de rotação. Calcule a massa da peça de chumbo que é necessário colocar na periferia da jante, para que o centro de massa do conjunto fique sobre o eixo. A massa do pneu é $10\,\mathrm{kg}$ e o raio da jante é $0.25\,\mathrm{m}$.

Resolução:

$\vec{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} = 0$

$\Leftrightarrow m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0$

$\Leftrightarrow (10\,\mathrm{kg})\,(-0.001\vec{e}_x)\ \mathrm{m} + m_2\,(0.25\vec{e}_x)\ \mathrm{m} = 0$

$\Leftrightarrow m_2 = \frac{0.01}{0.25}\,\mathrm{kg} = 0.04\,\mathrm{kg}$

2.11 Momento de uma força

O momento de uma força (também designado por torque) em torno de um eixo, devido a uma força, é a medida da capacidade de uma força produzir rotação à volta de um eixo e, é definido da seguinte maneira:

$$M = r \times F \times \sin\theta \tag{2.19}$$

onde r é a distância radial do eixo ao ponto de aplicação da força e θ é o ângulo agudo entre as linhas de acção de r e F. A nossa representação gráfica está ilustrada na figura 2.2. As unidades do momento são newton-metro ($\mathrm{N\,m}$). O momento da força pode ser postivo ou negativo por exemplo, um momento que tenda a causar uma rotação na direcção contrária à dos ponteiros dos relógios é positivo, enquanto um que cause rotação na direcção dos ponteiros dos relógios é negativo.

2.12 Estática de corpos rígidos

Diz-se que um corpo rígido está em equilíbrio num referencial inercial quando se verificam simultaneamente as duas seguintes condições:

- A soma de todas as forças exteriores que actuam no corpo é nula (equilíbrio de translação),

$$\sum_i \mathbf{F}_i = 0 \tag{2.20}$$

- A soma dos momentos das forças exteriores que actuam no corpo, calculados em relação a qualquer ponto, é nula (equilíbrio de rotação),

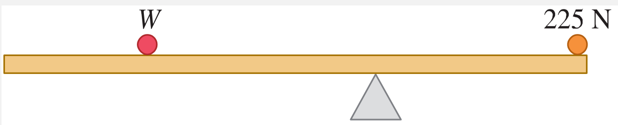
$$\sum_i \mathbf{M}_i = 0 \tag{2.21}$$

sendo $\mathbf{M}_i$ o momento da força $\mathbf{F}_i$ em relação ao ponto em questão.

Exercício 2.17 Uma barra uniforme, de peso $255\,\mathrm{N}$ e comprimento $2.00\,\mathrm{m}$, suporta duas cargas, uma de peso $225\,\mathrm{N}$ e outra de peso W desconhecido, conforme está ilustrado na figura. Quando a carga de peso W está situada a $50.0\,\mathrm{cm}$ do extremo esquerdo da barra, a barra fica em equilíbrio na horizontal quando o fulcro se situa a $75.0\,\mathrm{cm}$ do extremo direito.

(a) Calcule o valor de W.

(b) (opcional) Se a carga de peso W for deslocada $25.0\,\mathrm{cm}$ para a direita, qual deve ser a nova posição do fulcro para que o equilíbrio seja restaurado?



Solução: a) $140\,\mathrm{N}$; b) $6\,\mathrm{cm}$ para a direita

Capítulo 3

Fluidos

A matéria pode ser classificada em quatro estados, são eles: sólido, líquido, gasoso, plasma. Este último, menos familiar à maioria das pessoas, pode ser resumidamente definido como um fluido que é capaz de conduzir electricidade. Neste capítulo iremos concentrar-nos no estudo dos fluidos, em particular, dos líquidos e dos gases.

Os fluidos incluem os líquidos e os gases. Os líquidos fluem por gravidade até ocuparem as regiões mais baixas possíveis dos seus recipientes. Os gases expandem-se para encher os seus recipientes, independentemente da forma dos recipientes.

Os fluidos desempenham um papel central no nosso cotidiano. Nós respiramos um fluido (o ar), bebemos um fluido (a água) e possuímos um fluido a circular no nosso sistema cardiovascular (o sangue). O oceano e a atmosfera são também eles fluidos.

Um fluido, em contraste com os sólidos, é uma substância que pode fluir (ou escoar). Os fluidos assumem a forma do recipiente em que são colocados (mesmo que demorem muito a fazê-lo). Os fluidos comportam-se dessa forma porque não conseguem resistir a forças tangenciais à sua superfície (i.e., um fluido deforma-se continuamente quando na presença de forças tangenciais). O mesmo não acontece quando na presença de forças perpendiculares à sua superfície, nesse caso o fluido oferece resistência.

3.1 Volume, massa volúmica e densidade

Volume é o espaço ocupado por um corpo ou por uma massa de um fluido. Vale a pena recordar que $1\,\mathrm{l} = 1\,\mathrm{dm}^3$, desta relação se obtém facilmente muitas outras, por exemplo podemos também obter $1\,\mathrm{ml} = 1\,\mathrm{cm}^3$.

A massa volúmica de uma substância, ρ, é o quociente entre a massa da substância, m, e o volume que ela ocupa, V,

$$\rho = \frac{m}{V} \tag{3.1}$$

A unidade do SI para a massa volúmica é o $\mathrm{kg\,m^{-3}}$. Muitas vezes são também utilizadas as unidades $\mathrm{g\,cm^{-3}}$, a relação que existe entre as duas unidades é a seguinte: $1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}} = 1\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$. A massa volúmica de um material depende em geral da pressão e da temperatura. No caso dos líquidos e dos sólidos, a massa volúmica varia pouco com a variação da pressão e da temperatura.

A densidade de uma substância é uma grandeza adimensional que consiste no quociente entre a massa volúmica da substância e a massa volúmica de uma substância que se toma como padrão.

$$d = \frac{\rho}{\rho_{\text{padrão}}} \tag{3.2}$$

No caso de sólidos e líquidos a substância padrão é a água a uma temperatura de cerca de $4\,°\mathrm{C}$ e a uma pressão de cerca de $1\,\mathrm{atm}$ (iremos definir pressão na secção 3.3). Nestas condições, a massa volúmica da água é aproximadamente $1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ ou $1\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$. Para os gases, a substância padrão é o ar seco nas condições normais de pressão e temperatura[1] ($\rho_{ar} \approx 1,3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$).

Vale a pena salientar que a densidade de um gás varia consideravelmente com a pressão enquanto que a densidade de um líquido não; i.e., um gás é bastante compressível enquanto que um líquido não o é.

Exercício 3.1 Um frasco de $200\,\mathrm{ml}$ é cheio com água a $4\,°\mathrm{C}$ até à borda. Quando o frasco é aquecido até a uma temperatura de $80\,°\mathrm{C}$ cerca de $6\,\mathrm{g}$ de água transbordam. Qual é a massa volúmica da água a $80\,°\mathrm{C}$? (Assuma que a expansão do frasco é negligível.)

Resolução: Nota: Este problema pode ser resolvido de mais do que uma maneira, vamos apresentar dois tipos de resolução

Nesta resolução estamos a concentrar-nos no recipiente que tem um volume fixo V.

$$\begin{cases} \rho = \frac{m}{V} \\ \rho' = \frac{m'}{V} \\ m' = m - 6\,\mathrm{g} \end{cases} \longrightarrow m = \rho V = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}} \times 200\,\mathrm{ml} = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}} \times 200 \times 10^{-3}\,\mathrm{dm^3} = \frac{1000\,\mathrm{kg}}{(10\,\mathrm{dm})^3} \times 200 \times 10^{-3}\,\mathrm{dm^3} = \frac{1}{5}\,\mathrm{kg} = 200\,\mathrm{g}$$

$m' = m - 6\,\mathrm{g} = 200\,\mathrm{g} - 6\,\mathrm{g} = 194\,\mathrm{g}$.

$\rho' = \frac{m'}{V} = \frac{194\,\mathrm{g}}{200\,\mathrm{cm^3}} = 0.97\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ ou $970\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.

Resolução alternativa:

Esta resolução consiste em concentrar-mo-nos no volume total da água, mesmo aquele que saiu do fraso. Neste caso como estamos sempre a falar na totalidade da água temos sempre a mesma massa m.

$$\begin{cases} \rho = \frac{m}{V} \\ \rho' = \frac{m}{V'} \\ V' = V + V_{6\,\mathrm{g},80\,°\mathrm{C}} \end{cases} \longrightarrow \rho V = \rho' V' \longrightarrow \rho' = \rho \frac{V}{V'} = \rho \frac{V}{V + V_{6\,\mathrm{g},80\,°\mathrm{C}}}$$

$$\rho' = \rho \frac{V}{V + V_{6\,\mathrm{g},80\,°\mathrm{C}}} \longrightarrow \rho' = \rho \frac{V}{V + \frac{m_{6\,\mathrm{g},80\,°\mathrm{C}}}{\rho'}} \longrightarrow \rho' V + m_{6\,\mathrm{g},80\,°\mathrm{C}} = \rho V$$

[1] As condições normais de temperatura e pressão (cuja sigla é PTN em Portugal) referem-se à condição experimental com temperatura e pressão de $273,15\,\mathrm{K}$ ($0\,°\mathrm{C}$) e $101325\,\mathrm{Pa}$ ($= 1\,\mathrm{atm}$), respectivamente.

$\longrightarrow \rho' V + m_{6\,\mathrm{g},80\,^\circ\mathrm{C}} = m \longrightarrow \rho' = \frac{m - m_{6\,\mathrm{g},80\,^\circ\mathrm{C}}}{V} = \frac{(200-6)\,\mathrm{g}}{200\,\mathrm{cm}^3} = 0.97\,\mathrm{g\,cm^{-3}} = 970\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$

Nota: Podemos recorrer a uma analogia para perceber o porquê do aumento de volume mantendo-se a massa constante: Imaginemos um bolo ao qual é adicionado fermento, com o passar do tempo o bolo irá crescer apesar da massa se manter igual.

3.2 Impulsão, princípio de Arquimedes e flutuabilidade

Quando um corpo está totalmente ou parcialmente imerso num fluido, fica sujeito a uma força, que se designa por força de impulsão, $\mathbf{I}$, por parte do fluido. A força é dirigida para cima e o seu módulo é igual ao peso do fluido deslocado. A isto chama-se o princípio de Arquimedes. Em módulo podemos escrever

$$I = g\rho_{fl}V_{im} \tag{3.3}$$

onde ρ_{fl} é a massa volúmica do fluido onde o corpo está imerso, V_{im} é o volume imerso do corpo. Note-se que o termo $\rho_{fl}V_{im}$ corresponde à massa do fluido deslocado. Naturalmente, a unidade de I no SI é o N.

Quando um corpo flutua num fluido, a magnitude da força de impulsão a que o corpo está sujeito é igual ao peso a que o corpo está sujeito.

Olhando para o caso particular da água temos então o seguinte:

Um objecto mais denso do que a água, quando competamente imerso na água, desloca um volume de água cujo peso é menor que o peso do objecto. Logo, o objecto afunda-se porque a impulsão é menor que o peso do objecto.

Um objecto menos denso do que a água, quando competamente imerso na água, desloca um volume de água cujo peso é maior que o peso do objecto. Logo, o corpo tende a vir à superfície porque a impulsão é maior que o peso do objecto.

Um objecto menos denso do que a água, quando colocado na superfície da água flutua, ficando com uma parte submersa. A parte submersa desloca um volume de água cujo peso é igual ao peso do corpo.

3.3 Pressão

A pressão média numa superfície de área A é encontrada como a magnitude da força dividida pela área, onde é estipulado que a força deve ser perpendicular (ou normal) à área

$$p = \frac{F}{A} \tag{3.4}$$

A unidade SI para a pressão é o $\mathrm{N\,m^{-2}}$, ao qual é dado um nome especial, o pascal (Pa). Vale a pena salientar que a pressão é um grandeza escalar.

Existem muitas outras unidades associadas ao conceito de pressão, por exemplo, a atmosfera (atm), que tal como o nome sugere é a pressão média aproximada da atmosfera ao nível do mar. A atmosfera e o pascal relacionam-se da seguinte forma

$$1\,\mathrm{atm} = 1.013 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$$

Existem muitas outras unidades que são vulgarmente utilizadas, outra muito comum é o bar. A relação entre o pascal e o bar é a seguinte

$$1\,\mathrm{bar} = 10^5\,\mathrm{Pa}$$

Exercício 3.2 Uma sala de uma casa tem as seguintes dimensões do chão $3.5\,\mathrm{m} \times 4.2\,\mathrm{m}$ e tem de altura $2.4\,\mathrm{m}$. O ar no interior encontra-se à pressão atmosférica, e possui uma massa volúmica de $1.21\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.

(a) Qual é o valor do peso do ar na sala?

(b) Qual é a magnitude da força da atmosfera no chão da sala?

Resolução:

(a) O peso do ar é dado por mg, onde m é a massa do ar dentro da sala. Para descobrir esta massa utilizamos a massa volúmica do ar.

$m = \rho V = \left(1.21\,\mathrm{kg\,m^{-3}}\right) \times (3.5\,\mathrm{m} \times 4.2\,\mathrm{m} \times 2.4\,\mathrm{m}) = 42.6888\,\mathrm{kg}$

Podemos agora calcular o peso do ar: $mg = 42.6888\,\mathrm{kg} \times 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}} = 418.35\,\mathrm{N} \approx 418\,\mathrm{N}$.

(b) $p = \frac{F}{A} \longrightarrow F = pA = 1.013 \times 10^5\,\mathrm{Pa} \times (3.5\,\mathrm{m} \times 4.2\,\mathrm{m}) = 1.48911 \times 10^6\,\mathrm{N} \approx 1.5 \times 10^6\,\mathrm{N}$.

3.3.1 Variação da pressão com a profundidade

Como os mergulhadores bem sabem, a pressão num lago ou no oceano aumenta com a profundidade. Da mesma forma, a pressão atmosférica diminui com o aumento da altitude, por esta razão, as aeronaves voando em altitudes elevadas devem ter cabines pressurizadas.

A relação que existe entre a pressão dentro de um líquido e a profundidade no líquido é a seguinte

$$p = p_0 + \rho g h \tag{3.5}$$

Isto é, a pressão p a uma profundidade h abaixo de um ponto do líquido no qual a pressão é p_0 é maior por um valor $\rho g h$. Se o líquido está em contacto com a atmosfera e p_0 é a pressão na superfície do líquido, então, p_0 é a pressão atmosférica.

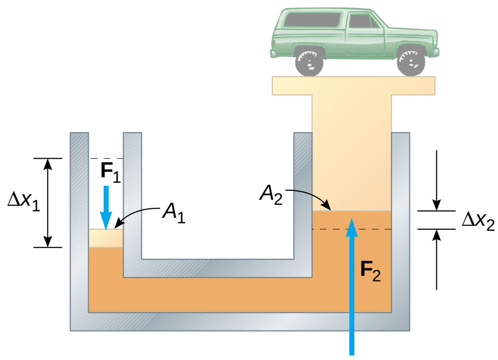


Figura 3.1: Diagrama de uma prensa hidráulica.

A equação 3.5 implica que a pressão é a mesma para todos os pontos à mesma profundidade, independentemente da forma do recipiente que contém o fluido. A equação 3.5 é chamada de equação fundamental da estática de fluidos.

Exercício 3.3 Encontre a pressão a uma profundidade de $10\,\mathrm{m}$ num lago, assuma que a pressão na superfície do lago é a pressão atmosférica.

Resolução: $p = p_0 + \rho g h = 1.013 \times 10^5\,\mathrm{Pa} + 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}} \times 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \times 10\,\mathrm{m} = 1.99300 \times 10^5\,\mathrm{Pa} \approx 2\,\mathrm{atm}$. Ou seja, a pressão a uma profundidade de $10\,\mathrm{m}$ é cerca do dobro da pressão à superfície.

3.4 Princípio de Pascal

Quando espremermos uma extremidade de uma bisnaga de pasta dentrífica para obtermos na outra extremidade pasta dentrífica estamos a ver o princípio de Pascal em acção. Este princípio também é a base da manobra de Heimlich, nesta manobra uma subida de pressão repentina exercida na região do abdómen é transmitida à garganta, forçando que seja ejectada a comida que esteja lá alojada.

O príncipio de Pascal pode ser enunciado da seguinte forma: Quando a pressão em qualquer parte de um fluido incompressível confinado é mudada, a pressão em qualquer outra parte do fluido é também mudada pela mesma quantidade.

3.4.1 Prensa hidráulica

Uma aplicação importante do princípio de Pascal é a prensa hidráulica. A prensa hidráulica é um dispositivo que serve para elevar cargas pesadas. Na figura 3.1 é apresentado um diagrama de uma prensa hidráulica. Vejamos o seu princípio de funcionamento.

Uma força de magnitude F_1 é aplicada a um êmbolo (também se pode designar por pistão) com uma pequena área de superfície A_1. A pressão é transmitida através de um líquido incompressível, a um êmbolo com maior área de superfície A_2. Visto que a pressão deve ser a mesma em ambos

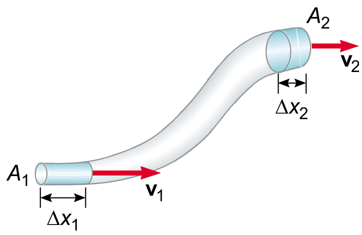


Figura 3.2: Um fluido a mover-se através de um tubo com área de secção recta variável.

os lados, $p = F_1/A_1 = F_2/A_2$. Portanto, a força F_2 é maior do que a força F_1 por um factor A_2/A_1. Ao projetar uma prensa hidráulica com áreas apropriadas A_1 e A_2, uma grande força de saída pode ser obtida através de uma força de entrada pequena. Travões hidráulicos, elevadores de carros, macacos hidráulicos e empilhadoras, todos usam este princípio.

Nota opcional: Como o líquido não é adicionado nem retirado do sistema, o volume de líquido empurrado para baixo no lado esquerdo da figura 3.1 quando o êmbolo se move para baixo, através de um deslocamento Δx_1, é igual ao volume de líquido empurrado para cima à direita, com o êmbolo direito a mover-se para cima através de um deslocamento Δx_2. Isto é, $A_1 \Delta x_1 = A_2 \Delta x_2$, assim, $A_2/A_1 = \Delta x_1/\Delta x_2$. Já mostrámos que $A_2/A_1 = F_2/F_1$. Assim, $F_2/F_1 = \Delta x_1/\Delta x_2$, de modo que $F_1 \Delta x_1 = F_2 \Delta x_2$. Cada lado desta equação é o trabalho realizado pela força. Assim, o trabalho feito pela força F_1 no êmbolo de entrada é igual ao trabalho feito pela força F_2 no êmbolo de saída, tal como seria de esperar, pela conservação de energia. •

3.5 Dinâmica dos fluidos

Até aqui estudámos fluidos em repouso, vamos agora debruçar-nos brevemente sobre os fluidos em movimento.

3.5.1 Equação de continuidade

Uma vez que o movimento de fluidos reais é bastante complexo vamos restringir o nosso estudo ao caso de fluidos ideais. Estes fluidos para além de outros requisitos não têm viscosidade (ou seja, não têm fricção interna), são incompressíveis (a massa volúmica é constante), e assumimos ainda que o escoamento deles occorre de forma laminar (i.e., a velocidade do fluido em cada ponto permanece constante)[2].

Vamos considerar um fluido ideal que escoa através de um tubo como se representa na figura (onde A designa a secção recta do tubo e $\mathbf{v}$ o vector velocidade nessa mesma secção) 3.2. É possível demonstrar (usando a lei de conservação da massa[3]) que

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = \text{constante} \tag{3.6}$$

[2]Uma condição adicional é a de o fluido ter de ser irrotacional. Ou seja, o fluido não pode ter momento angular em relação a qualquer ponto. Está fora do âmbito desta unidade o detalhe desta afirmação.

[3]Num sistema fechado nunca se cria nem se elimina matéria, apenas é possível transformá-la de uma forma para outra.

Esta expressão é chamada equação de continuidade para os fluidos, o seu significado é o seguinte: o produto entre a área e o módulo da velocidade do fluido em todos os pontos ao longo de um tubo é constante para um fluido incompressível.

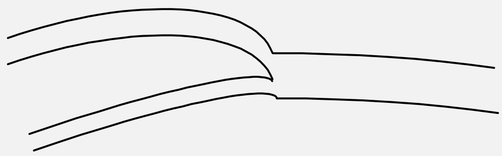
A equação 3.6 diz-nos que a velocidade é alta, onde o tubo é estreito (área pequena) e baixa, onde o tubo é largo (área grande). O produto Av, que tem as dimensões de volume por unidade de tempo, é chamado de fluxo de volume ou caudal. A condição $Av =$ constante é equivalente à afirmação de que o volume de fluido que entra numa extremidade de um tubo num determinado intervalo de tempo é igual ao volume deixando a outra extremidade do tubo no mesmo intervalo de tempo, desde que não haja vazamentos.

Cada vez que regamos com uma mangueira estamos a demonstrar a equação da continuidade. Ao bloquearmos parcialmente a abertura com o polegar, reduzimos a área da secção transversal por onde a água passa. Como resultado, a velocidade da água aumenta à medida que ela sai da mangueira, podemos assim atingir distâncias grandes com o jacto de água.

Exercício 3.4 O sangue flui de uma artéria de raio $0.3\,\mathrm{cm}$, onde a velocidade é $10\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$, para uma região onde o raio é reduzido para $0.2\,\mathrm{cm}$ devido ao espessamento das paredes arteriais (arteriosclerose). Qual é a velocidade do sangue na região mais estreita?

Resolução: Eq. da continuidade: $A_1 v_1 = A_2 v_2 \longrightarrow v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = \frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} v_1 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 v_1 = \left(\frac{0.3\,\mathrm{cm}}{0.2\,\mathrm{cm}}\right)^2 \left(10\,\mathrm{cm\,s^{-1}}\right) = 22.5\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$.

Exercício 3.5 A figura mostra a junção de dois afluentes na zona de formação de um rio. Um dos afluentes tem $8.2\,\mathrm{m}$ de largura, $3.4\,\mathrm{m}$ de profundidade e uma velocidade média da corrente de $2.3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. (Trata-se de um valor médio sobre a secção transversal do afluente.) O outro afluente possui $6.8\,\mathrm{m}$ de largura, $3.2\,\mathrm{m}$ de profundidade e flui com uma velocidade média de $2.6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. A largura do rio é $10.5\,\mathrm{m}$, e a velocidade média da corrente é $2.9\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Determine a profundidade do rio.



Resolução: Vamos usar a Eq. da continuidade e designar por h a profundidade do rio. Então, $(8.2\,\mathrm{m})(3.4\,\mathrm{m})(2.3\,\mathrm{m\,s^{-1}}) + (6.8\,\mathrm{m})(3.2\,\mathrm{m})(2.6\,\mathrm{m\,s^{-1}}) = h(10.5\,\mathrm{m})(2.9\,\mathrm{m\,s^{-1}})$ que leva a $h \approx 4.0\,\mathrm{m}$.

3.5.2 Equação de Bernoulli

À medida que um fluido se move através de uma região em que a sua velocidade e/ou a sua altura acima da superfície da Terra se altera, a pressão no fluido varia com essas alterações. A relação entre a velocidade do fluido, a pressão e a altitude foi obtida pela primeira vez em 1738 pelo físico suíço Daniel Bernoulli. Em sua honra a equação designa-se equação de Bernoulli

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{constante} \tag{3.7}$$

Esta equação mostra que a pressão de um fluido diminui com o aumento da velocidade do fluido. Para além disso, a pressão diminui à medida que aumenta a elevação. Isso explica por que é que a pressão da água de torneiras nos andares superiores de um edifício alto é fraca, a menos que sejam tomadas medidas para proporcionar maior pressão para esses andares superiores.

Exercício 3.6 Num cano de área de secção transversal $4.0\,\mathrm{cm}^2$ água move-se com uma velocidade de $5.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. A água desce gradualmente $10\,\mathrm{m}$ à medida que o cano aumenta a sua área para $8.0\,\mathrm{cm}^2$.

(a) Qual é a velocidade da água no nível mais baixo?

(b) Se a pressão ao nível mais elevado for $1.5 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$, qual será a pressão ao nível mais baixo?

Resolução:

(a) Eq. da continuidade: $A_1 v_1 = A_2 v_2 \longrightarrow A_1 v_1 = 2A_1 v_2 \longrightarrow v_2 = \frac{v_1}{2} = \frac{5.0}{2} = 2.5\,\mathrm{m/s}$

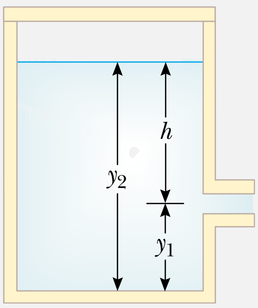
(b) Eq de Bernoulli: $p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$

$p_2 = p_1 + \rho\frac{1}{2}\left(v_1^2 - v_2^2\right) + \rho g\left(h_1 - h_2\right)$

$p_2 = 1.5 \times 10^5\,\mathrm{Pa} + \left(1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}\right)\frac{1}{2}\left(\left(5.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}\right)^2 - \left(2.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}\right)^2\right) + \left(1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}\right)\left(9.8\,\mathrm{m/s^2}\right)\left(10\,\mathrm{m}\right)$

$= 1.5 \times 10^5\,\mathrm{Pa} + 9375.0\,\mathrm{Pa} + 98000.0\,\mathrm{Pa} = 257375.\,\mathrm{Pa} \approx 2.6 \times 10^5\,\mathrm{Pa}.$

Exercício 3.7 Um tanque fechado contendo um líquido de massa volúmica ρ possui um orifício no seu lado a uma distância y_1 da base do tanque (ver figura). O orifício está aberto para a atmosfera, e o seu diâmetro é muito menor que o diâmetro do tanque. O ar em cima do líquido é mantido a uma pressão p_2. Determine a velocidade do líquido ao sair pelo orifício quando o nível do líquido acima do orifíco é h.



Resolução: Vamos utilizar a eq de Bernoulli: $\boxed{p+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho g h=const}$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{No orifício } \boxed{1}: p=p_1; h=0 \\ \text{e ficamos com } p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho g\,(0)=const\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Na superfície do líquido } \boxed{2}: p=p_2; h=h \\ \text{e ficamos com } p_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2+\rho g h=const\end{array}}$$

Pela equação da continuidade temos que $A_1 v_1 = A_2 v_2$

Uma vez que $A_1 \gg A_2 \longrightarrow v_1 \ll v_2 \longrightarrow \frac{1}{2}\rho v_1^2 \ll \frac{1}{2}\rho v_2^2$. Assim, podemos desprezar o termo $\frac{1}{2}\rho v_1^2$ face a $\frac{1}{2}\rho v_2^2$.

Ficamos com:

$$\boxed{p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=p_2+\rho g h \Leftrightarrow \frac{1}{2}\rho v_1^2=(p_2-p_1)+\rho g h \Leftrightarrow v_1=\sqrt{\frac{2}{\rho}\,(p_2-p_1)+2gh}}$$

Nota: Podemos ver que no caso particular de o tanque estar aberto em cima, temos que $p_2=p_1$ e chegamos à chamada fórmula de Torricelli, $v_1=\sqrt{2gh}$.

Capítulo 4

Termodinâmica

A termodinâmica pode ser definida como a ciência da energia. Embora se tenha a percepção do que é energia, é difícil defini-la com precisão. A energia pode ser vista como a capacidade de provocar alterações. Neste capítulo iremos debruçar-nos sobre a termodinâmica e algumas das suas leis:

- A lei zero da termodinâmica estabelece que, se dois corpos estão em equilíbrio térmico com um terceiro corpo, eles estão também em equilíbrio térmico entre si.
- A primeira lei da termodinâmica expressa o princípio de conservação de energia e estabelece que a energia é uma propriedade termodinâmica.
- A segunda lei da termodinâmica estabelece que o calor flui espontaneamente de um objecto mais quente para outro mais frio, mas não ao contrário.

4.1 Temperatura e lei zero da termodinâmica

Embora estejamos familiarizados com a palavra temperatura como medida de calor e frio, não é fácil estabelecer uma definição exacta desta propriedade. Com base nas nossas sensações fisiológicas, caracterizamos o nível de temperatura qualitativamente com expressões do tipo: gelado, frio, morno, quente ou a escaldar. No entanto, não nos é possível atribuir valores à temperatura baseando-nos somente nos nossos sentidos, pois estes podem ser enganadores. Por exemplo, uma cadeira de metal parece-nos mais fria do que uma de madeira, mesmo estando as duas à mesma temperatura. Outro exemplo, se removermos de um mesmo congelador um recipiente metálico com gelo ou uma caixa de papelão cheia com vegetais congelados, iremos verificar que o recipiente metálico nos irá parecer mais frio do que a caixa de papelão, apesar de ambos estarem à mesma temperatura. Sentimos os dois objectos de forma diferente pois o metal transfere energia na forma de calor (ver secção 4.3) a uma taxa mais elevada do que o papelão.

No entanto, existem diversas propriedades dos materiais que variam consoante a temperatura de uma forma previsível e repetível, podendo servir como base de medição precisa da temperatura. O vulgar termómetro de mercúrio é baseado no princípio de expansão do mercúrio com a temperatura.

Já foi enunciada a lei zero da termodinâmica, esta estabelece que, se dois corpos estão em equilíbrio térmico com um terceiro corpo, eles estão também em equilíbrio térmico entre si. Vale a pena notar que ao substituir-se o terceiro corpo por um termómetro, a lei zero pode ser reescrita na forma: dois corpos estão em equilíbrio térmico se ambos apresentarem o mesmo valor de medição de temperatura, mesmo que não estejam em contacto.

4.1.1 Escalas de temperatura

As escalas de temperatura permitem aos cientistas utilizar uma base comum para medições, tendo sido desenvolvidas diversas ao longo do tempo. Todas estas escalas são baseadas em estados da matéria facilmente reproduzíveis, tais como os pontos de fusão e de ebulição da água, também denominados ponto de gelo e ponto de vapor, respectivamente.

As escalas de temperatura mais usadas são a escala Celsius, a escala Fahrenheit e a escala kelvin[1].

As escalas de temperatura diferem em dois aspectos: o ponto escolhido como zero, e as magnitudes das unidades incrementais ou graus na escala.

A escala Celsius ($^\circ\mathrm{C}$) é usada para as medições de temperatura comuns na maior parte do mundo. É uma escala empírica. Desenvolveu-se por um progresso histórico, o que levou a que o seu ponto zero, $0\,^\circ\mathrm{C}$, fosse definido pelo ponto de congelação (ou solidificação) da água, com graus adicionais definidos de modo que $100\,^\circ\mathrm{C}$ fosse o ponto de ebulição da água, ambos à pressão atmosférica ao nível do mar. Devido ao intervalo de 100 graus, ela é chamada de escala centígrada.

Nos Estados Unidos da América é comum usar-se a escala Fahrenheit, nesta escala a água congela (i.e. solidifica) a $32\,^\circ\mathrm{F}$ e ferve (i.e. entra em ebulição) a $212\,^\circ\mathrm{F}$ à pressão atmosférica ao nível do mar.

Muitas medições científicas usam a escala de temperatura kelvin. É uma escala de temperatura termodinâmica ou absoluta. Seu ponto zero, $0\,\mathrm{K}$, é definido para coincidir com a temperatura mais fria fisicamente possível (chamado zero absoluto). A temperatura do zero absoluto ocorre a $0\,\mathrm{K} = -273,15\,^\circ\mathrm{C}$ (ou $-459,67\,^\circ\mathrm{F}$) e o ponto de congelação da água à pressão atmosférica ao nível do mar ocorre a $273.15\,\mathrm{K} = 0\,^\circ\mathrm{C}$ (ou $32\,^\circ\mathrm{F}$). A unidade SI para a temperatura é o kelvin[2]. As relações existentes entre as três escalas são as seguintes (onde T, T_C, T_F são, respectivamente,

[1] Estas escalas devem o seu nome a Anders Celsius (1701–1744), Daniel Gabriel Fahrenheit (1686–1736), e William Thomson (também conhecido como Lord Kelvin) (1824–1907), respectivamente.

[2] Quando se fala em kelvin não se usa o termo graus, como sucede com as outras duas escalas de temperatura.

as temperaturas em kelvin, em graus Celsius e em graus Fahrenheit):

$$T = T_C + 273,15 \tag{4.1}$$

$$T_F = \frac{9}{5}T_C + 32 \tag{4.2}$$

É fácil constatar (ver exercício 4.2) que:

$$\Delta T = \Delta T_C = \frac{5}{9}\Delta T_F \tag{4.3}$$

Exercício 4.1 Num dia em que a temperatura atinge $50\,°\mathrm{F}$, qual é o valor da temperatura em graus Celsius e em kelvin?

Resolução: $T_F = \frac{9}{5}T_C + 32 \longrightarrow T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32) = \frac{5}{9}(50 - 32) = 10\,°\mathrm{C}$

$T = T_C + 273,15 = 10 + 273,15 = 283,15 \approx 283\,\mathrm{K}$.

Exercício 4.2 Demonstre a equação 4.3.

Resolução: Seja $\begin{cases} T_1 = T_{C_1} + 273,15 \\ T_2 = T_{C_2} + 273,15 \end{cases}$

$\longrightarrow \Delta T = T_2 - T_1 = T_{C_2} + 273,15 - (T_{C_1} + 273,15)$

$= T_{C_2} - T_{C_1} = \Delta T_C$

Seja $\begin{cases} T_{F_1} = \frac{9}{5}T_{C_1} + 32 \\ T_{F_2} = \frac{9}{5}T_{C_2} + 32 \end{cases}$

$\longrightarrow \Delta T_F = T_{F_2} - T_{F_1} = \frac{9}{5}T_{C_2} + 32 - \left(\frac{9}{5}T_{C_1} + 32\right) = \frac{9}{5}(T_{C_2} - T_{C_1}) = \frac{9}{5}\Delta T_C$

$\longrightarrow \Delta T_C = \frac{5}{9}\Delta T_F$.

Exercício 4.3 Uma panela é aquecida desde $25\,°\mathrm{C}$ até $80\,°\mathrm{C}$. Qual é a mudança de temperatura da panela na escala kelvin e na escala Fahrenheit?

Resolução: $\Delta T = \Delta T_C = \frac{5}{9}\Delta T_F \longrightarrow \Delta T = (80 - 25) = \frac{5}{9}\Delta T_F$

$\longrightarrow \begin{cases} \Delta T = (80 - 25) \\ \frac{5}{9}\Delta T_F = (80 - 25) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \Delta T = 55\,\mathrm{K} \\ \Delta T_F = \frac{9}{5} \times 55 = 99\,°\mathrm{F} \end{cases}.$

4.2 Gases ideais

Quase todos os gases quimicamente estáveis se comportam idealmente se estiverem suficientemente afastados das condições sob as quais se solidificam ou liquefazem. Por outras palavras, um gás real comporta-se como um gás ideal quando os seus átomos ou moléculas estão tão afastados que não interagem apreciavelmente uns com os outros. Um gás ideal (ou perfeito) é aquele que obedece à lei dos gases ideais abaixo apresentada. De pressões baixas a moderadas, e a temperaturas não muito baixas, os seguintes gases comuns podem ser considerados ideais: ar, azoto, oxigénio, hélio, hidrogénio e néon.

4.2.1 Lei dos gases ideais

A pressão absoluta[3] p de n moles de gás contidos num volume V está relacionada com a temperatura absoluta T por

$$pV = nRT \tag{4.4}$$

onde $R = 8.314\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$ é a constante universal dos gases. Se o volume contém m quilogramas de gás que tem uma massa molecular (ou atómica) M, então $n = m/M$.

Exercício 4.4 Determine a massa do ar contido num recinto cujas dimensões são $4\,\mathrm{m} \times 5\,\mathrm{m} \times 6\,\mathrm{m}$ a $100\,\mathrm{kPa}$ e $25\,°\mathrm{C}$. Informação de referência: A massa molar do ar é $28.97\,\mathrm{kg/\,kmol}$.

Resolução: Vamos considerar que o ar nestas condições pode ser tratado como um gás perfeito.

$pV = nRT \longrightarrow n = \frac{pV}{RT} = \frac{100\times10^3\,\mathrm{Pa}\times(4\,\mathrm{m}\times5\,\mathrm{m}\times6\,\mathrm{m})}{8.314\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}\times(25+273.15)\,\mathrm{K}} = 4841.01\frac{\mathrm{m^3\,mol\,Pa}}{\mathrm{J}} = 4841.01\frac{\mathrm{m^3\,mol\,N/\,m^2}}{\mathrm{N\,m}} = 4841.01\,\mathrm{mol}.$

$m = n\times$ massa molar $= 4841.01\,\mathrm{mol} \times 28.97\,\mathrm{kg/\,kmol} = 4841.01\,\mathrm{mol} \times \frac{28.97\,\mathrm{kg}}{10^3\,\mathrm{mol}} = 140.244\,\mathrm{kg} \approx 140\,\mathrm{kg}.$

4.2.2 Lei de Dalton

A pressão de uma mistura de gases é igual à soma das pressões que cada gás irá exercer se existisse isoladamente à temperatura e no volume da mistura. Esta lei é conhecida como lei de Dalton ou lei das pressões parciais ou lei das pressões aditivas de Dalton. Esta lei é válida para gases ideias de forma exacta, e para gases reais de forma aproximada. Isto deve-se às forças intermoleculares que podem ser significativas para gases reais a elevada densidade.

4.3 Calor

Sabe-se por experiência própria que uma lata fresca de refrigerante colocada sobre uma mesa acabará por aquecer e que uma batata quente, também sobre a mesma mesa, arrefecerá com o tempo. Quando um corpo é deixado num meio que esteja a uma temperatura diferente, verifica-se uma transferência de energia entre o corpo e o meio ambiente, até que se estabeleça o equilíbrio térmico. Ou seja, o corpo e o meio alcançam a mesma temperatura. A transferência de energia

[3] Ou seja, a pressão que se mede tendo como referência o vácuo perfeito.

ocorre sempre no sentido do corpo de maior temperatura para o de menor temperatura e, uma vez atingida a igualdade de temperatura, cessa a transferência. Neste processo, diz-se que a energia foi transferida sob a forma de calor. O calor é definido como a forma de energia que é transferida entre dois sistemas (ou um sistema e a sua vizinhança) devido a uma diferença de temperatura. Assim, não pode ocorrer qualquer transferência de calor entre dois sistemas à mesma temperatura.

A unidade SI para o calor é o joule. Por vezes, são utilizadas outras unidades para o calor como a caloria ($1\,\mathrm{cal} = 4,184\,\mathrm{J}$). À caloria utilizada pelos nutricionistas chama-se a grande caloria, e é na realidade uma quilocaloria ($1\ \mathrm{Cal} = 1\,\mathrm{kcal} = 10^3\,\mathrm{cal}$).

Exercício 4.5 Uma embalagem de chocolate tem indicado que cada porção de $100\,\mathrm{g}$ de chocolate possui de energia $535\,\mathrm{kcal}$. A quanto corresponde esta energia em joules?

Resolução: $535\,\mathrm{kcal} \times \frac{4{,}184\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{cal}} = 535 \times 10^3\,\mathrm{cal} \times \frac{4.184\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{cal}} = 2.23844 \times 10^6\,\mathrm{J} \approx 2238\,\mathrm{kJ}$.

O calor específico (ou capacidade térmica específica, c) de uma substância é a quantidade de calor requerida para mudar a temperatura de uma unidade de massa da substância de um grau. Se uma quantidade de calor ΔQ é requerida para produzir uma mudança de temperatura ΔT numa massa m de uma substância, então o calor específico é

$$c = \frac{\Delta Q}{m\Delta T}$$

No SI, c tem unidades $\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$, que é equivalente a $\mathrm{J\,kg^{-1}\,{}^\circ C^{-1}}$. Também largamente utilizada é a unidade $\mathrm{cal\,g^{-1}\,{}^\circ C^{-1}}$, onde $1\,\mathrm{cal\,g^{-1}\,{}^\circ C^{-1}} = 4184\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$. Cada substância tem um valor característico de calor específico, que varia ligeiramente com a temperatura. Para a água, $c = 4184\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,{}^\circ C^{-1}} = 1,00\,\mathrm{cal\,g^{-1}\,{}^\circ C^{-1}}$.

Exercício 4.6 O alumínio tem um calor específico de $0.897\,\mathrm{J\,K^{-1}\,g^{-1}}$. Quanto é o aumento de temperatura de um corpo de alumínio de massa $10\,\mathrm{g}$ quando recebe uma quantidade de calor de $5\,\mathrm{J}$?

Resolução: $c = \frac{\Delta Q}{m\Delta T} \longrightarrow \Delta T = \frac{\Delta Q}{mc} = \frac{5\,\mathrm{J}}{10\,\mathrm{g} \times 0.897\,\mathrm{J\,K^{-1}\,g^{-1}}} = 0.557414\,\mathrm{K} \approx 0.6\,\mathrm{K}$.

4.4 Transferência de calor

Existem três formas distintas de transferência de calor: condução, convecção e radiação. Todas as formas de transferência de calor requerem a existência de uma diferença de temperatura. A transferência de calor ocorre, como já foi referido, do meio que tem uma temperatura mais elevada para o que tem uma temperatura mais baixa. Vale a pena salientar que frequentemente mais que um destes processos ocorre simultaneamente numa dada situação.

4.4.1 Condução

A condução térmica[4] ou difusão térmica é a transferência de energia térmica entre átomos e/ou moléculas vizinhos numa substância devido a uma diferença de temperatura, sem que ocorra qualquer movimento global da matéria na escala macroscópica.

Este tipo de transferência de calor explica porque quando colocamos uma panela em contacto com uma fonte de calor toda a panela fica aquecida, inclusive as partes que não estão em contato com a fonte de calor.

Consideremos uma porta de madeira com uma maçaneta em metal. Quando tocamos na madeira da porta ou na maçaneta temos a sensação que a maçaneta está mais fria que a madeira. Isto é assim, porque a quantidade de calor trocada entre a mão e o metal da maçaneta é maior que a quantidade de calor trocada entre a mão e a madeira. Tal fica a dever-se ao facto do metal ser um melhor condutor de calor do que a madeira. É por isso que se usam panelas de metal para cozinhar e pratos em cerâmica para comer.

A taxa de transferência de calor devido à condução é proporcional à diferença de temperatura entre os dois corpos (ou materiais) e a um coeficiente que se chama condutividade térmica. Materiais com alta condutividade térmica são utilizados em dissipadores térmicos e materiais com baixa condutividade térmica são utilizados para isolamento térmico.

4.4.2 Convecção

A convecção de energia térmica ocorre num fluido quando matéria quente flui de modo a deslocar matéria mais fria. Exemplos típicos são o fluxo de ar quente registado num sistema de aquecimento e o fluxo da água quente na corrente quente do Golfo. Até mesmo quando cozinhamos às vezes conseguimos ver nas panelas as chamadas correntes de convecção: Quando se aquece a água na região de baixo, junto do fundo de uma panela, o calor não se vai comunicando às sucessivas camadas de líquido que podemos imaginar umas sobre as outras, porque a água, como todos os líquidos, é móvel. Quando se aquece a parte debaixo do líquido, essa camada fica mais leve do que todo o resto, e então sobe e passa para cima. Entretanto já vem outra camada debaixo mais quente, que faz o mesmo. Sobe e passa para cima. E assim vai continuando, as que vão de baixo para cima obrigam as de cima a virem para baixo, de modo que, quando se aquece a água, formam-se dentro da panela, correntes do próprio líquido, que circulam subindo e descendo e que, dessa maneira, vão comunicando o calor a toda a água.

[4] Utiliza-se o termo térmica para distinguir de outro tipo de condução: a condução eléctrica.

4.4.3 Radiação e corpo negro

Radiação é o modo de transporte da energia electromagnética radiante através do vácuo e do espaço vazio entre os átomos. A energia radiante é diferente do calor, apesar de ambos corresponderem a energia em trânsito.

Um corpo negro é um corpo que absorve toda a energia radiante que incide sobre ele. No equilíbrio térmico um corpo emite tanta radiação como a que absorve. Logo, um bom absorvente de radiação é também um bom emissor de radiação. Suponha que uma superfície de área A tem uma temperatura absoluta T e irradia apenas uma fracção da energia que irradiaria uma superfície de corpo negro. Então ε é chamada a emissividade da superfície e a energia por segundo (i.e., potência) irradiada pela superfície é dada pela lei de Stefan-Boltzmann:

$$P = \varepsilon A \sigma T^4 \tag{4.5}$$

onde $\sigma = 5,67051 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$ é a constante de Stefan-Boltzmann. A emissividade de um corpo negro é a unidade.

Todos os objectos cuja temperatura está acima do zero absoluto irradiam energia. Quando um objecto à temperatura absoluta T está num ambiente onde a temperatura é T_a a energia total irradiada por segundo pelo objecto é

$$P = \varepsilon A \sigma \left(T^4 - T_a^4\right) \tag{4.6}$$

Esta última fórmula é também ela conhecida por lei de Stefan-Boltzmann.

Exercício 4.7 Um estudante está a tentar decidir o que irá vestir. O ambiente à sua volta encontra-se a uma temperatura de $20,0\,^\circ\mathrm{C}$. Se a temperatura do estudante sem roupa é $35\,^\circ\mathrm{C}$, quanta energia perde o estudante na forma de radiação em $10\,\mathrm{min}$? Assuma que a emissividade da pele é de $0,900$ e que a área de superfície da pele do estudante é de $1,50\,\mathrm{m}^2$.

Resolução: $P = \varepsilon A \sigma \left(T^4 - T_a^4\right) = 0,900 \times 1,50\,\mathrm{m}^2 \times 5,67051 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$ $\times \left((35 + 273,15)^4 - (20 + 273,15)^4\right)\,\mathrm{K}^4 = 124,900\,\mathrm{W}$.

O que acabámos de calcular foi a potência que é a energia por unidade de tempo. O que queremos calcular é a energia num intervalo de $10\,\mathrm{min}$ (vale a pena relembrar que $1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{J\,s^{-1}}$): $E = P \times \Delta t = 124,900\,\mathrm{W} \times 10\,\mathrm{min} \times \frac{60\,\mathrm{s}}{1\,\mathrm{min}} = 74940,0\,\mathrm{J} \approx 7,5 \times 10^4\,\mathrm{J}$.

4.5 Primeira lei da termodinâmica

A energia interna de um sistema, U, é a soma de toda a energia associada aos componentes microscópicos de um sistema, i.e. é a soma de todas as formas de energia que os átomos e moléculas do sistema têm[5].

A primeira lei da termodinâmica é uma afirmação da lei da conservação da energia. Ela estabelece que, se uma quantidade de calor ΔQ flui para um sistema, então esta energia deve aparecer como um aumento de energia interna ΔU para o sistema e/ou trabalho ΔW realizado pelo sistema sobre as suas vizinhanças. Assim, a primeira lei da termodinâmica traduz-se na equação

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W \tag{4.7}$$

Vale a pena salientar que se o trabalho for realizado pelas vizinhanças sobre o sistema então deve vir afectado dum sinal negativo.

Exercício 4.8 Um sistema termodinâmico é submetido a um processo em que a sua energia interna diminui $500\,\mathrm{J}$. Ao mesmo tempo, $220\,\mathrm{J}$ de trabalho é feito sobre o sistema. Encontre a energia transferida para o sistema ou a partir do sistema através de calor.

Resolução: $\Delta Q = \Delta U + \Delta W = -500\,\mathrm{J} - 220\,\mathrm{J} = -720\,\mathrm{J}$.

4.6 Segunda lei da termodinâmica

A segunda lei da termodinâmica pode ser enunciada da seguinte forma: o calor flui espontaneamente de um objecto mais quente para outro mais frio, mas não ao contrário. Um enunciado alternativo é o seguinte: nenhuma máquina térmica que opere num ciclo pode converter todo o calor que absorve em trabalho útil.

Assim, a segunda lei da termodinâmica diz-nos como uma mudança espontânea vai ocorrer, enquanto que a primeira lei nos diz se a mudança é possível ou não. A primeira lei da termodinâmica lida com a conservação da energia; a segunda lei lida com a dispersão da energia.

[5] De uma forma mais precisa podemos dizer que a energia interna de um sistema é a soma das energias cinéticas dos átomos e moléculas que constituem um sistema e das energias potenciais associadas às suas mútuas interações. Não inclui as energias cinéticas e potencial do sistema como um todo, nem as suas energias nucleares ou outras energias inter-atómicas.

Capítulo 5

Óptica

Óptica é o ramo da física que envolve o comportamento e as propriedades da luz, incluindo as suas interações com a matéria e a construção de instrumentos que a usam ou a detectam. A óptica geralmente descreve o comportamento da luz visível, ultravioleta e infravermelha. Como a luz é uma onda eletromagnética, outras formas de radiação eletromagnética, como raios-X , microondas e ondas de rádio apresentam propriedades similares.

A maioria dos fenómenos ópticos podem ser contabilizados utilizando a descrição eletromagnética clássica de luz. No entanto, descrições eletromagnéticas completas da luz são muitas vezes difíceis de aplicar na prática. Na prática, a óptica utiliza geralmente modelos simplificados. O mais comum deles é a óptica geométrica que, trata a luz como um conjunto de raios que viajam em linhas retas e que mudam a sua direcção quando passam através de superfícies ou se reflectem nelas.

O olho humano é sensível à radiação eletromagnética com comprimentos de onda de cerca de 400 a $700\,\mathrm{nm}$. O comprimento de onda mais curto do espectro visível corresponde à luz violeta e o mais longo corresponde à luz vermelha. As cores que o ser humano consegue distinguir são o resultado da resposta fisiológica e psicológica do sistema sensorial olho-cérebro para as diferentes frequências da luz visível. Embora a correspondência entre a cor percebida e a frequência seja muito boa, há muitos desvios interessantes. Por exemplo, uma mistura de luz vermelha e luz verde é percebida pelo sistema sensorial olho-cérebro como amarelo, mesmo na ausência de luz na região amarela do espectro.

Nós vemos a luz, porque ela estimula as células nos nossos olhos. Esta estimulação é um exemplo da capacidade de influência química da luz. E uma vez que os nossos olhos são capazes de distinguir entre os diferentes comprimentos de onda de luz, nós conseguimos distinguir as cores. A luz solar normalmente parece incolor, porque contém uma rica mistura de comprimentos de onda que os nossos olhos interpretam como luz branca. No entanto, existem situações em que a luz solar se torna separada em suas cores constituintes (ver, e.g., secção 5.2).

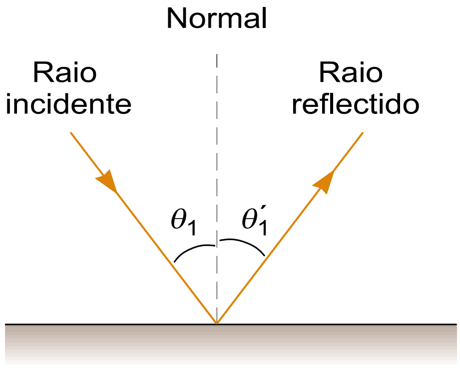


Figura 5.1: O raio incidente, a normal e o raio reflectido estão todos no mesmo plano.

5.1 Reflexão e refracção

5.1.1 Reflexão

Considere-se um raio de luz viajando no ar e incidente com um ângulo numa superfície plana e lisa, conforme mostrado na figura 5.1. Os raios incidente e reflectidos fazem ângulos θ_1 e $\theta_1^{'}$, respectivamente, onde os ângulos são medidos entre a normal e os raios. (A normal é uma linha perpendicular à superfície no ponto onde o raio incidente atinge a superfície.) As experiências e a teoria mostram que o ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência:

$$\theta_1 = \theta_1^{'} \tag{5.1}$$

Esta relação é chamada de lei da reflexão.

Nota: Usamos o índice 1 para nos referirmos aos parâmetros para a luz no meio inicial. Quando a luz viaja de um meio para outro, usamos o índice 2 para os parâmetros associados à luz no novo meio. No caso em estudo, a luz mantém-se no mesmo meio, por isso, só precisamos de usar o índice 1.

5.1.2 Refracção

Quando um raio de luz que viaja através de um meio transparente encontra uma fronteira que leva a outro meio transparente, como mostrado na figura 5.2, parte da energia é refletida e parte penetra no segundo meio. O raio que entra no segundo meio sofre uma inclinação em relação à normal na fronteira e diz-se ser refractado[1]. O raio incidente, o raio refletido e o raio refractado estão todos no mesmo plano. O ângulo de refracção, θ_2 na figura 5.2, depende das propriedades dos dois meios e do ângulo de incidência através da relação:

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{v_2}{v_1} = \text{constante} \tag{5.2}$$

[1]Outro termo também utilizado é transmitido.

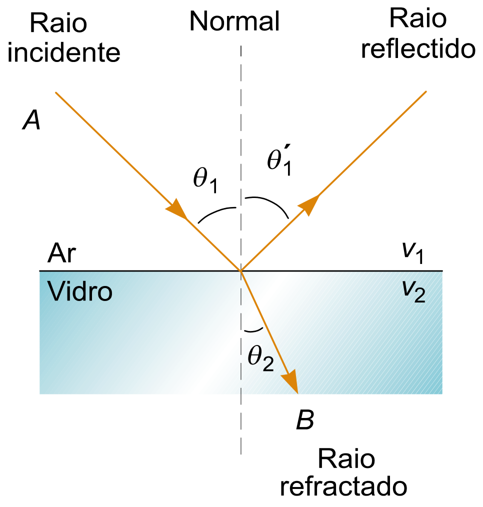


Figura 5.2: O raio incidente, a normal, o raio reflectido e o raio refractado estão todos no mesmo plano.

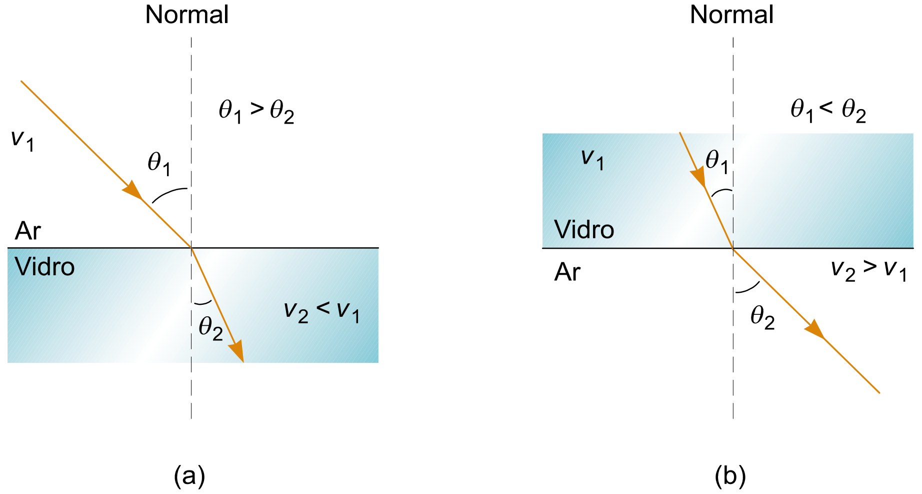


Figura 5.3: (a) Luz move-se de um material em que a sua a velocidade é elevada para um material em que a sua velocidade é inferior, o raio inclina-se de forma a aproximar-se da normal. (b) Luz move-se a partir de um material no qual a sua velocidade é lenta para um material em que se move mais rapidamente, o raio inclina-se de forma a afastar-se da normal.

onde v_1 é a velocidade da luz no primeiro meio e v_2 é a velocidade da luz no segundo meio. O trajecto de um raio de luz através de uma superfície de refração é reversível. Por exemplo, o raio mostrado na figura 5.2 viaja do ponto A para o ponto B. Se o raio tivesse partido de B, iria viajar para a esquerda ao longo da linha BA para atingir o ponto A, e a parte refletida apontaria para baixo e para a esquerda no vidro.

A partir da equação 5.2, podemos inferir que, quando a luz se move de um material em que a sua a velocidade é elevada para um material em que a sua velocidade é inferior, como mostrado na figura 5.3a, o ângulo de refracção θ_2 é menor que o ângulo de incidência θ_1, e o raio inclina-se de forma a aproximar-se da normal. Se o raio se move a partir de um material no qual a luz se move lentamente para um material em que se move mais rapidamente, como ilustrado na figura 5.3b, θ_2 é maior do que θ_1, e o raio inclina-se de forma a afastar-se da normal.

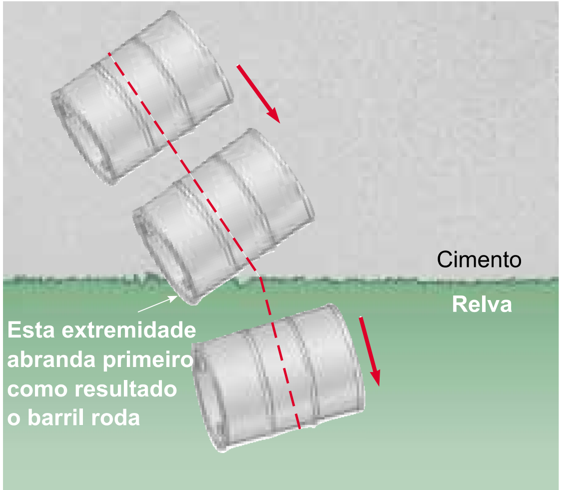


Figura 5.4: Um barril rolando por cima de dois pavimentos diferentes.

Nota O comportamento da luz que passa do ar para outra substância e depois ressurge no ar é muitas vezes uma fonte de confusão para os alunos. Quando a luz viaja no ar, a sua velocidade é $3.00 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, mas esta velocidade é reduzida para cerca de $2.00 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ quando a luz entra num bloco de vidro. Quando a luz re-emerge no ar, a sua velocidade aumenta instantaneamente para o seu valor original de $3.00 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Isto é muito diferente do que acontece, por exemplo, quando uma bala é disparada através de um bloco de madeira. Neste caso, a velocidade da bala é reduzida enquanto ela se move através da madeira porque um pouco da sua energia original é usada para separar as fibras da madeira. Quando a bala entra no ar mais uma vez, ela surge com a velocidade que tinha antes de sair do bloco de madeira. •

Análogo mecânico da refracção

Um análogo mecânico de refracção é mostrado na figura 5.4. Temos um barril a rolar em cima de cimento, quando a extremidade esquerda do barril que rola atinge a relva, ela diminui a sua velocidade, enquanto que o lado direito permanece no cimento e por isso continua a rolar com a sua velocidade original. Esta diferença de velocidades faz com que o barril gire, e com isso mude a direcção da viagem.

Índice de refracção

A velocidade da luz em qualquer meio é menor do que a velocidade da luz no vácuo. É conveniente definir o índice de refracção de um meio como a seguinte razão:

$$n = \frac{\text{velocidade da luz no vácuo}}{\text{velocidade da luz no meio}} = \frac{c}{v} \tag{5.3}$$

A partir desta definição podemos concluir que o índice de refracção é um número adimensional maior que a unidade (porque v é sempre menor que c), com excepção do vácuo onde toma o valor 1 (o índice de refracção no ar é $1,0003$ podemos portanto, em boa aproximação considerá-lo como 1). Quando estamos a comparar meios diferentes por vezes emprega-se o termo refringente. Por exemplo, se dizemos que um meio é mais refringente do que outro isso significa que o índice de refracção desse meio é maior do que o índice de refracção do outro meio.

Lei de Snell

O modo como um raio refracta numa interface entre dois meios materiais com índices de refracção diferentes é dado pela lei de Snell[2] (alguns autores designam esta lei por lei de Snell–Descartes ou lei da refracção):

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \tag{5.4}$$

Vale a pena salientar que esta lei é apenas válida para meios isotrópicos[3].

Exercício 5.1 Luz passa de um material com um índice de refracção $1,3$ para um material com índice de refração $1,2$. Em comparação com o raio incidente, o raio refractado (a) inclina-se de forma a aproximar-se da normal (b) não é deflectido (c) inclina-se de forma a afastar-se da normal.

Solução: c)

Exercício 5.2 Um feixe de luz de comprimento de onda de $550\,\mathrm{nm}$ que viaja pelo ar incide sobre uma placa de material transparente. O feixe incidente forma um ângulo de $40,0\,°$ com a normal, e o feixe refractado forma um ângulo de $26,0\,°$ com a normal. Encontre o índice de refracção do material.

Resolução: $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \longrightarrow n_1 \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = n_2$
$\longrightarrow n_2 = 1.00 \times \frac{\sin(40.0\,°)}{\sin(26.0\,°)} = 1.46631 \approx 1.47.$

Exercício 5.3 Um feixe de luz de comprimento de onda de $550\,\mathrm{nm}$ que viaja pelo ar incide sobre uma placa de vidro óptico (cujo índice de refracção é 1.52). O feixe incidente forma um ângulo de $30,0\,°$ com a normal. Determine o ângulo de refracção.

Resolução: $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \longrightarrow \sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin\theta_1$
$\longrightarrow \theta_2 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin\theta_1\right) = \arcsin\left(\frac{1.00}{1.52} \sin\left(30.0\,°\right)\right) = 0.335189\,\mathrm{rad} = 19.2049\,° \approx 19.2\,°.$

Exercício 5.4 Um feixe de luz passa dum meio 1 para um meio 2, com este último meio a ser uma placa espessa de material cujo índice de refracção é n_2, em seguida emerge do meio 2 novamente para o meio 1. Mostre que o feixe emergente é paralelo ao feixe incidente.

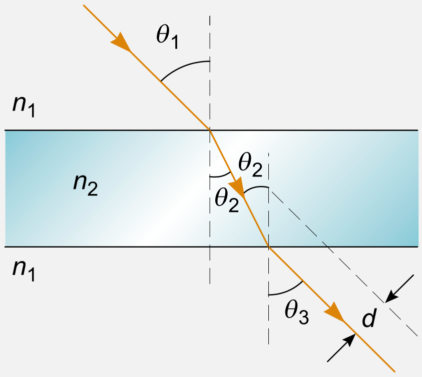
Resolução:

[2] A descoberta experimental desta relação é usualmente atribuída a Willebrord Snell (1591–1627) e por isso é chamada lei de Snell.

[3] Isotropia é a propriedade que caracteriza as substâncias que possuem as mesmas propriedades físicas independentemente da direcção considerada.

$$\begin{cases} n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \\ n_2 \sin\theta_2 = n_3 \sin\theta_3 \\ \qquad n_3 = n_1 \end{cases} \longrightarrow n_1 \sin\theta_1 = n_1 \sin\theta_3 \longrightarrow \sin\theta_1 = \sin\theta_3 \longrightarrow \theta_1 = \theta_3$$

Assim, vê-se que o feixe emergente é paralelo ao feixe incidente. No entanto o feixe emergente sofre um deslocamento (d) como se pode ver na figura seguinte



5.2 Dispersão e prismas

Uma propriedade importante do índice de refracção n é que, para um dado material, o índice varia com o comprimento de onda da luz que passa através do material. Este comportamento é chamado de dispersão. Uma vez que n é uma função do comprimento de onda, a lei de Snell de refracção indica que a luz de diferentes comprimentos de onda é refractada em diferentes ângulos quando incide sobre um material com um índice de refracção diferente.

O índice de refracção geralmente diminui com o aumento do comprimento de onda. Isto significa que a luz violeta sofre uma deflexão maior do que a luz vermelha quando passa através de uma fronteira entre meios diferentes.

Para compreender os efeitos que a dispersão pode ter sobre a luz, consideremos o que acontece quando a luz incide sobre um prisma, como mostrado na figura 5.5. Um raio de luz de comprimento de onda único incidente sobre o prisma na parte esquerda emerge refractado da sua direcção original por um ângulo δ, chamado ângulo de desvio.

Agora, vamos supor que um feixe de luz branca (uma combinação de todos os comprimentos de onda visíveis) incide sobre um prisma, tal como ilustrado na figura 5.6. Os raios que emergem surgem espalhados numa série de cores conhecidas como o espectro visível. Estas cores, em ordem de comprimento de onda descendente, são vermelho, laranja, amarelo, verde, azul, índigo e violeta. Claramente, o ângulo de desvio δ depende do comprimento de onda. A luz violeta é a que se desvia mais, a vermelha a que menos se desvia, e as restantes cores do espectro visível estão entre estes dois extremos. Newton mostrou que cada cor tem um determinado ângulo de desvio e

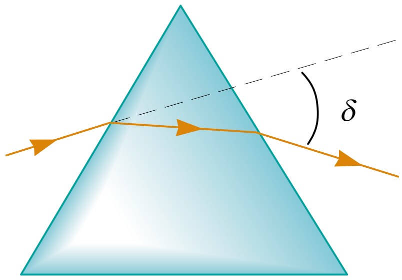


Figura 5.5: Um prisma refracta um raio de luz com um comprimento de onda único por um ângulo δ.

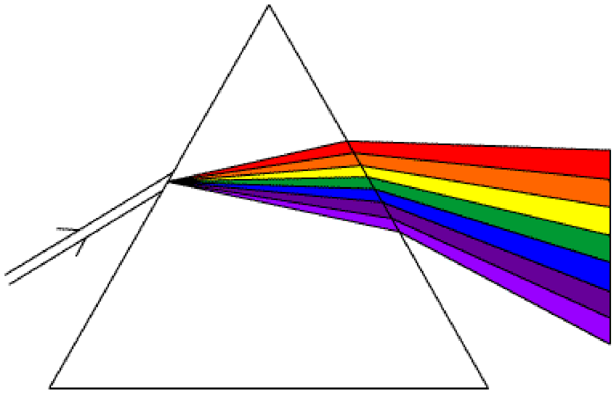


Figura 5.6: Fenómeno de dispersão da luz branca num prisma.

que as cores podem ser recombinadas para formar a luz branca inicial.

Um arco-íris é um fenómeno óptico e meteorológico que é causada por uma combinação de reflexão e refração da luz em gotículas de água na atmosfera da Terra, resultando em um espectro de luz que aparece no céu. Os arco-íris causados pela luz solar aparecem sempre na secção do céu diretamente oposta ao sol.

Capítulo 6

Eletricidade

6.1 Carga eléctrica

6.1.1 Quantização

Em 1909, Robert Millikan (1868-1953) descobriu que a carga elétrica ocorre sempre como um múltiplo inteiro de uma quantidade de carga fundamental e. Em termos modernos, a carga eléctrica q diz-se quantizada, onde q é o símbolo padrão usado para a carga como uma variável. Isto é, a carga eléctrica existe na forma de "pacotes" discretos e podemos escrever $q = Ne$, onde N é um número inteiro. Outras experiências no mesmo período mostraram que o electrão tem uma carga $-e$ e o protão tem uma carga de igual magnitude mas sinal oposto e. Algumas partículas, tais como o neutrão, não têm carga. A unidade SI para a carga é o coulomb (C), e o valor da unidade fundamental é $e \approx 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$.

6.1.2 Conservação

A soma algébrica das cargas num sistema isolado é constante. Quando uma partícula com carga $+e$ é criada, uma partícula com carga $-e$ é simultaneamente criada na proximidade. Quando uma partícula com carga $+e$ desaparece, uma partícula com carga $-e$ também desaparece na proximidade. Logo, a carga total de um sistema isolado mantém-se constante.

6.1.3 Carga de prova ou carga de teste

Uma carga de prova (também se designa carga de teste) é uma carga muito pequena que pode ser usada para fazer medições num sistema eléctrico. Admite-se que esta carga, que é ínfima tanto em magnitude como em tamanho, tem um efeito desprezável nas suas vizinhanças.

6.2 Lei de Coulomb

Suponha que duas cargas pontuais[1], q_1 e q_2, estão a uma distância r_{12} uma da outra no vácuo. Se q_1 e q_2 têm o mesmo sinal, as duas cargas repelem-se; se têm sinais opostos, elas atraem-se. À força experimentada por cada uma das cargas devido à outra chama-se uma força eléctrica ou de Coulomb, e é dada pela lei de Coulomb[2]

$$F_{12} = k_e \frac{|q_1|\,|q_2|}{r_{12}^2} \tag{6.1}$$

onde k_e é uma constante chamada constante de Coulomb. O valor desta constante depende da escolha de unidades, no SI esta constante $k_e \approx 8.99 \times 10^9\,\mathrm{N\,m^2\,C^{-2}}$. Por convenção, esta constante no SI também é escrita na forma

$$k_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \tag{6.2}$$

onde $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2\,N^{-1}\,m^{-2}}$ é uma constante a que se dá o nome de permitividade do vácuo. Se o meio em questão não for o vácuo então a lei escreve-se

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{|q_1|\,|q_2|}{r_{12}^2} \tag{6.3}$$

onde ε é a permitividade do meio em questão. Esta última equação pode ser considerada a forma mais geral da lei de Coulomb.

Vale a pena salientar a semelhança bastante grande que existe entre esta lei e a lei de gravitação universal (ver secção 2.5).

Sabemos que a força é um quantidade vectorial logo a lei de Coulomb pode também ser expressa em termos vectoriais na forma

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \widehat{r}_{12} \tag{6.4}$$

onde $\mathbf{F}_{12}$ é a força exercida sobre a carga q_1 pela carga q_2 e $\widehat{r}_{12}$ é um versor (i.e., um vector unitário) definido da seguinte forma $\widehat{r}_{12} = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{r_{12}} = \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}$

A lei de Coulomb deve obedecer à terceira lei de Newton (ver secção 2.4), logo $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$. Ou seja, a força que a carga q_2 exerce sobre a carga q_1 é igual em módulo à força que a carga q_1 exerce sobre a carga q_2, as forças têm no entanto sentidos opostos.

Exercício 6.1 O electrão e o protão no átomo de hidrogénio estão separados (em média) por uma distância de aproximadamente $5.3 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}$. Encontre as magnitudes das forças eléctrica e de gravitação entre as duas partículas.

Resolução:

[1] Iremos usar o termo carga pontual para designar uma partícula de tamanho zero que possui carga eléctrica. O comportamento eléctrico de electrões e protões é muito bem descrito considerando-os como cargas pontuais.

[2] Esta lei foi proposta por Charles Coulomb (1736–1806) devido às suas observações experimentais.

$F_e = k_e \frac{q_e q_p}{r^2}$, com $k_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 8.99 \times 10^9 \,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}}$

$F_g = G\frac{m_e m_p}{r^2}$, com $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{kg^2}} = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$

A carga do electrão é: $e = -1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$

A carga do protão é simétrica da carga do electrão: $-e = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$

A massa do electrão é: $m_e = 9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$

A massa do protão é: $m_p = 1.67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

Em termos de magnitudes temos:

$$\begin{cases} F_e = 8.99 \times 10^9\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}} \times \frac{\left|-1.602\times10^{-19}\,\mathrm{C}\right|\left(1.602\times10^{-19}\,\mathrm{C}\right)}{\left(5.3\times10^{-11}\,\mathrm{m}\right)^2} \approx 8.2 \times 10^{-8}\,\mathrm{N} \\ F_g = 6.67 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{kg^2}} \times \frac{\left(9.11\times10^{-31}\,\mathrm{kg}\right)\left(1.67\times10^{-27}\,\mathrm{kg}\right)}{\left(5.3\times10^{-11}\,\mathrm{m}\right)^2} \approx 3.6 \times 10^{-47}\,\mathrm{N} \end{cases}$$

Podemos concluir que a força gravitacional entre partículas atómicas é negligenciável quando comparada com a força eléctrica.

Exercício 6.2 Duas cargas pontuais, $Q_1 = 50 \times 10^{-6}\,\mathrm{C}$ e $Q_2 = 10 \times 10^{-6}\,\mathrm{C}$, estão localizadas nas posições $(-1, 1, -3)\,\mathrm{m}$ e $(3, 1, 0)\,\mathrm{m}$, respectivamente. Encontre a força que actua sobre Q_1.

Resolução:

$\mathbf{F}_{12} = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}$, onde $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = (-1, 1, -3) - (3, 1, 0) = (-4, 0, -3)\,\mathrm{m}$

Assim $r_{12} = \sqrt{(-4)^2 + (0)^2 + (-3)^2} = 5\,\mathrm{m}$.

$\mathbf{F}_{12} = 8.99 \times 10^9 \times \frac{\left(50\times10^{-6}\right)\left(10\times10^{-6}\right)}{5^3}\,(-4, 0, -3) = (-0.14, 0, -0.11)\,\mathrm{N}$.

6.3 Campo eléctrico (opcional)

Diz-se que existe um campo eléctrico num ponto qualquer do espaço quando uma carga de prova colocada nesse ponto experimenta uma força eléctrica. A direcção do campo eléctrico num ponto é a mesma que a direcção da força experimentada por uma carga de teste positiva colocada nesse ponto.

A intensidade do campo eléctrico num ponto é igual à força experimentada por uma carga de teste unitária positiva colocada nesse ponto. Como a intensidade do campo eléctrico é uma força por unidade de carga, então é uma grandeza vectorial. As unidades de $\mathbf{E}$ são $\mathrm{N\,C^{-1}}$ ou $\mathrm{V\,m^{-1}}$ (como será mostrado mais tarde). Se uma carga q é colocada num ponto onde o campo eléctrico devido a outras cargas é $\mathbf{E}$, a carga experimentará uma força $\mathbf{F_E}$ dada por

$$\mathbf{F_E} = q\mathbf{E} \tag{6.5}$$

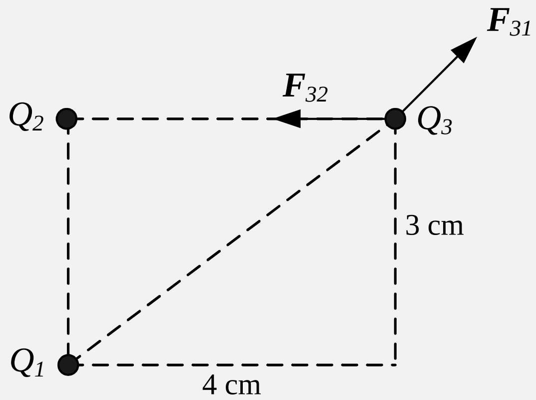
Se q é negativo, $\mathbf{F_E}$ será no sentido oposto a $\mathbf{E}$.

6.4 Princípio de sobreposição

A força experimentada por uma carga devido a outras cargas é a soma vectorial das forças de Coulomb que actuam nela devido a estas outras cargas.

De modo semelhante, o campo eléctrico num determinado ponto devido a várias cargas é a soma vectorial dos campos eléctricos devidos às cargas individuais.

Exercício 6.3 (opcional) Três cargas pontuais estão localizadas nas esquinas de um rectângulo no espaço livre, como se ilustra na figura. Os valores das cargas são: $Q_1 = +3 \times 10^{-6}\,\mathrm{C}, Q_2 = -2 \times 10^{-6}\,\mathrm{C}, Q_3 = +5 \times 10^{-6}\,\mathrm{C}$. Encontre $\mathbf{F}_3$, a força que actua sobre Q_3.



Resolução:

$\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32}$.

$\mathbf{F}_{31} = k_e \frac{q_3 q_1}{r_{31}^2} \frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}}$, com $\mathbf{r}_{31} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 = (0.04, 0.03) - (0, 0) = (0.04, 0.03)\ \mathrm{m}$.

Ficamos com $r_{31} = \sqrt{0.04^2 + 0.03^2} = 0.05\,\mathrm{m}$.

$\mathbf{F}_{32} = k_e \frac{q_3 q_2}{r_{32}^2} \frac{\mathbf{r}_{32}}{r_{32}}$, com $\mathbf{r}_{32} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2 = (0.04, 0.03) - (0, 0.03) = (0.04, 0)\ \mathrm{m}$.

Ficamos com $r_{32} = 0.04\,\mathrm{m}$.

$\mathbf{F}_{31} = 8.99 \times 10^9 \times \frac{(5\times10^{-6})(3\times10^{-6})}{0.05^3} (0.04, 0.03) = (43.15, 32.36)\ \mathrm{N}$.

$\mathbf{F}_{32} = 8.99 \times 10^9 \times \frac{(5\times10^{-6})(-2\times10^{-6})}{0.04^3} (0.04, 0) = (-56.19, 0)\ \mathrm{N}$.

$\mathbf{F}_3 = (43.15, 32.36) + (-56.19, 0) = (-13.0, 32.4)\ \mathrm{N}$.

6.5 Corrente eléctrica

Uma corrente eléctrica consiste num fluxo de partículas carregadas. Isto aplica-se às partículas carregadas num acelerador, a iões numa solução electrolítica, num gás ionizado ou plasma, bem como aos electrões num condutor. Para se produzir uma corrente eléctrica, deve-se aplicar um campo eléctrico com o fim de fazer mover as partículas carregadas numa direcção bem definida.

A intensidade de uma corrente eléctrica é definida como a carga eléctrica que passa por unidade de tempo através de uma secção da região onde flui, tal como a secção transversal de um tubo num acelerador, ou num cabo metálico. Deste modo, se no intervalo de tempo Δt passarem N partículas carregadas, cada uma com a carga q, pela secção transversal de um condutor médio, a carga total que o atravessa é $\Delta Q = Nq$. Então, a intensidade da corrente, ou simplesmente corrente, é

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \tag{6.6}$$

A expressão anterior dá a corrente média num intervalo de tempo Δt; a corrente instantânea em determinado momento é dada por

$$I = \frac{dQ}{dt} \tag{6.7}$$

A corrente eléctrica é expressa em $\mathrm{C\,s^{-1}}$ (coulomb/segundo), unidade conhecida como ampère[3] (A). Um ampère é a intensidade de uma corrente eléctrica que corresponde à passagem da carga eléctrica de um coulomb, em cada segundo, por uma secção do condutor.

O sentido de uma corrente eléctrica é definido como sendo o do movimento das partículas positivas. É o mesmo sentido do campo eléctrico aplicado, ou da queda de potencial que produz o movimento das partículas carregadas. Por isso, se uma corrente se deve ao movimento de partículas com carga negativa, como os electrões, o sentido convencional da corrente é oposto ao movimento real dos electrões. Esta convenção pode parecer inconveniente, mas foi adoptada antes de se saber que a corrente, nos condutores metálicos, se deve ao movimento dos electrões; tornou-se, depois, difícil de alterar. Se houver partículas com cargas opostas, como numa solução eletrolítica ou num gás ionizado, a corrente eléctrica consiste no movimento de partículas positivas e negativas em direcções opostas.

6.6 Diferença de potencial

Define-se a diferença de potencial eléctrico entre dois pontos A e B ($V_B - V_A$) como sendo o trabalho necessário para deslocar uma carga unitária de A para B

$$V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q} \tag{6.8}$$

A unidade do SI é o volt (V) que é o mesmo que $\mathrm{J\,C^{-1}}$ (Joule por coulomb).

6.6.1 Pilha

Uma pilha é uma fonte de energia eléctrica. Se nenhuma perda de energia interna ocorre na pilha então a diferença de potencial entre os seus terminais é chamada a força electromotriz (fem) da pilha. Se nada for dito em contrário, será assumido que a diferença de potencial nos terminais da pilha é igual à sua fem. A unidade da fem é a mesma que a unidade da diferença de potencial, o volt.

[3] Em homenagem a André M. Ampère (1775-1836)

Material	Resistividade ρ (ohm-cm)
Polistireno	1×10^{18}
Silício	2.3×10^{5}
Carbono	4×10^{-3}
Alumínio	2.7×10^{-6}
Cobre	1.7×10^{-6}

Tabela 6.1: Resistividades de alguns materiais.

6.7 Resistividade

A capacidade de um material resistir à passagem de carga é chamada resistividade, ρ. Materiais que são bons isoladores eléctricos têm um alto valor de resistividade. Materiais que são bons condutores de corrente eléctrica possuem baixos valores de resistividade. Valores de resistividade de alguns materiais são fornecidos na tabela 6.1. O cobre é usado vulgarmente em fios pois permite que a corrente flua facilmente. O silício é muito usado para prover de resistividade circuitos eléctricos de semicondutores. O polistireno é usado como isolador.

6.8 Resistência

Resistência eléctrica é a propriedade física de um elemento ou dispositivo que impede o fluxo de corrente; e é representada pelo símbolo R.

Georg Simon Ohm (1787-1854) conseguiu mostrar que a corrente num circuito composto por uma bateria e um fio condutor de secção transversal uniforme pode ser expressa como

$$I = \frac{AV}{\rho L} \tag{6.9}$$

onde A é a área da secção tranversal, ρ é a resistividade, L é o comprimento, e V a diferença de potencial (d.d.p.; também designada por tensão ou voltagem) aos extremos do condutor. Ohm definiu a constante resistência R como

$$R = \frac{\rho L}{A} \tag{6.10}$$

A lei de Ohm, que relaciona a tensão e a corrente, foi publicada em 1827 como

$$V = RI \tag{6.11}$$

Esta lei estabelece que para um condutor a temperatura constante, a relação entre a diferença de potencial entre dois pontos do condutor e a corrente eléctrica que o atravessa é constante. Esta constante é a resistência eléctrica R do condutor entre aqueles dois pontos.

A unidade de resistência R foi adoptada como sendo o ohm em honra a Ohm e é usualmente abreviada pelo símbolo Ω (omega maísculo). Assim, um ohm é a resistência de um condutor

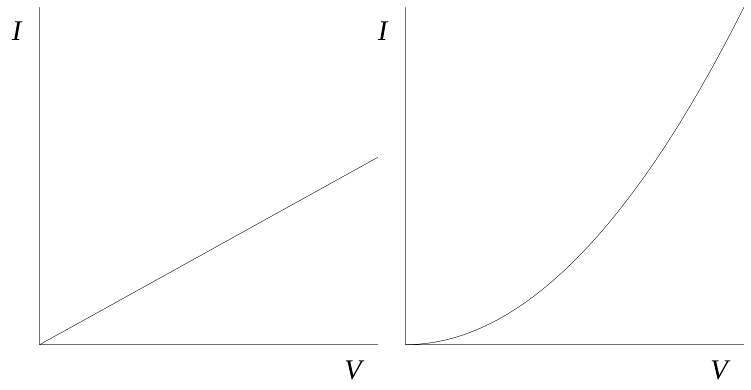


Figura 6.1: (a) Material óhmico. (b) Material não óhmico.

Figura 6.2: Representação de uma resistência.

pelo qual passa uma corrente de um ampère quando, entre os seus terminais, se estabelece uma diferença de potencial de um volt ($1\,\Omega = 1\,\mathrm{V}/\,\mathrm{A}$). A resistência de um cabo comum de TV com $10\,\mathrm{m}$ de comprimento é aproximadamente $2\,\mathrm{m}\Omega$.

Os materiais que obedecem à lei de Ohm são designados por materiais óhmicos (ver figura 6.1a). Para materiais óhmicos a resistência não depende da diferença de potencial ou da corrente.

Para os materiais não óhmicos (ver figura 6.1b), a resistência depende da corrente I, por isso, V não é proporcional a I.

A lei de Ohm não é uma lei fundamental da natureza, como as leis de Newton ou as leis da termodinâmica, mas sim uma descrição empírica de uma propriedade partilhada por muitos materiais.

Um condutor com uma resistência apreciável é designado resistência, e é, normalmente, representado na seguinte forma

Exercício 6.4 A resistividade de um fio de níquel-crómio é $1,5 \times 10^{-6}\,\Omega\,\mathrm{m}$.

(a) Calcule a resistência por unidade de comprimento do fio que tem de raio $0,321\,\mathrm{mm}$.

(b) Se aplicarmos uma diferença de potencial de $10\,\mathrm{V}$ a um fio de níquel-crómio de $1,0\,\mathrm{m}$ de comprimento, qual é a corrente no fio?

Resolução:

(a) $R = \frac{\rho L}{A} \longrightarrow \frac{R}{L} = \frac{\rho}{A} = \frac{\rho}{\pi r^2} = \frac{1.5\times10^{-6}\,\Omega\,\mathrm{m}}{\pi(0.321\times10^{-3}\,\mathrm{m})^2} = 4.63374\,\Omega\,\mathrm{m}^{-1} \approx 4.6\,\Omega\,\mathrm{m}^{-1}$.

(b) $I = \frac{V}{R} = \frac{V}{\frac{R}{L}\times L} = \frac{10\,\mathrm{V}}{4.6\,\Omega\,\mathrm{m}^{-1}\times 1\,\mathrm{m}} = 2.17391\,\mathrm{A} \approx 2.2\,\mathrm{A}$.

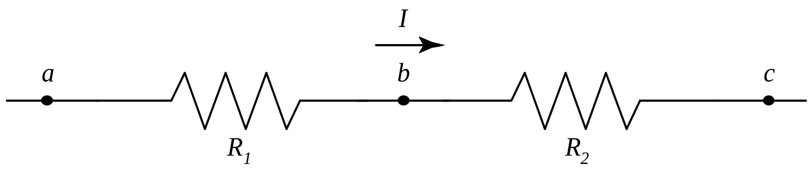


Figura 6.3: Duas resistências em série são atravessadas pela mesma corrente.

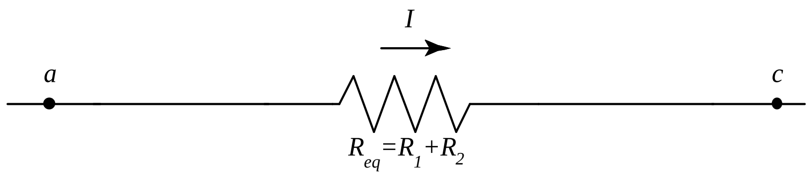


Figura 6.4: As resistências da figura 6.3 podem ser substituídas por uma resistência equivalentente $R_{eq} = R_1 + R_2$ que obtemos a mesma queda de potencial quando a R_{eq} é atravessada pela mesma corrente que no circuito da figura 6.3.

6.8.1 Combinação de resistências (opcional)

A análise de um circuito pode ser, normalmente, simplificada substituindo duas ou mais resistências por apenas uma resistência equivalente que seja atravessada pela mesma corrente e com a mesma queda de potencial do que as resistências anteriores.

Resistências em série

Quando duas ou mais resistências estão conectadas como R_1 e R_2 na figura 6.3**,** de maneira que transportem a mesma corrente I, diz-se que as resistências estão ligadas em série. A queda de potencial através de R_1 é IR_1 e através de R_2 é IR_2. A queda de potencial através das duas resistências é a soma da queda de potencial através das resistências individualmente:

$$V = IR_1 + IR_2 = I\left(R_1 + R_2\right)$$

A resistência equivalente R_{eq} que dá a mesma queda de potencial total V quando atravessada pela mesma corrente I é encontrada igualando V a IR_{eq} (ver figura 6.4). Assim a R_{eq} é dada por

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

Quando existem mais do que duas resistências em série, a sua resistência equivalente é

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots \tag{6.12}$$

Resistências em paralelo

Duas resistências que estão ligadas como na figura 6.5, de maneira que tenham a mesma diferença de potencial através delas, estão em paralelo. Note que as resistências estão ligadas em ambas as extremidade por fios. Seja I a corrente que flui do ponto a para o ponto b. No ponto a a corrente divide-se em duas partes, I_1 na resistência R_1 e I_2 em R_2. A corrente total é a soma das correntes individuais:

$$I = I_1 + I_2$$

A queda de potencial através de qualquer uma das resistências, $V = V_a - V_b$, está relacionada com as correntes por

$$V = I_1 R_1 = I_2 R_2 \tag{6.13}$$

A resistência equivalente para as resistências em paralelo é a resistência R_{eq} para a qual a mesma corrente total I produz a queda de potencial V (ver figura 6.6):

$$R_{eq} = \frac{V}{I}$$

Resolvendo esta equação para I e usando $I = I_1 + I_2$, ficamos com

$$I = \frac{V}{R_{eq}} = I_1 + I_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2}$$

onde usámos a Eq. 6.13 para I_1 e I_2. Assim, a resistência equivalente para duas resistências em paralelo é dada por

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Este resultado pode ser generalizado para combinações, como as da figura 6.7, nas quais três ou mais resistências estão ligadas em paralelo

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots \tag{6.14}$$

6.8.2 Código de cores nas resistências (opcional)

Resistências de baixa potência têm um conjunto de valores padrão. Códigos de bandas coloridas indicam o valor da resistência, assim como a tolerância. O código de cor para o valor da resistência utiliza dois dígitos e um terceiro dígito como expoente na potência de base 10, por esta ordem. Uma quarta banda designa a tolerância. Assim, uma resistência apresenta-se, normalmente, na forma da figura 6.8

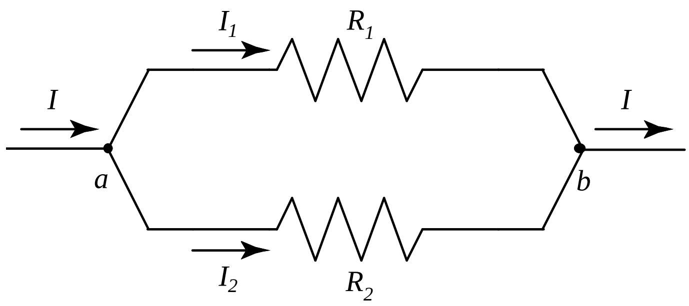


Figura 6.5: Duas resistências estão em paralelo quando estão juntamente ligadas em ambas as extremidades de maneira que a queda de potencial é a mesma nas duas.

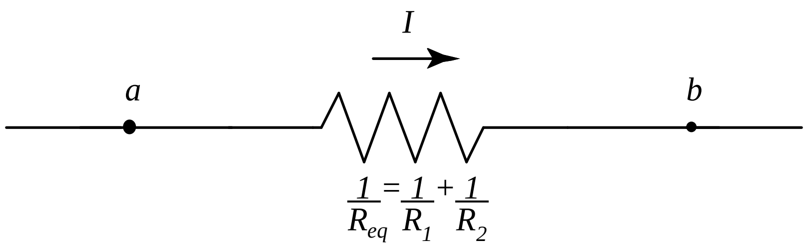


Figura 6.6: As duas resistências da **Fig.5.** podem ser substituídas por uma resistência equivalentente R_{eq} que está relacionada com R_1 e R_2 pela fórmula $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

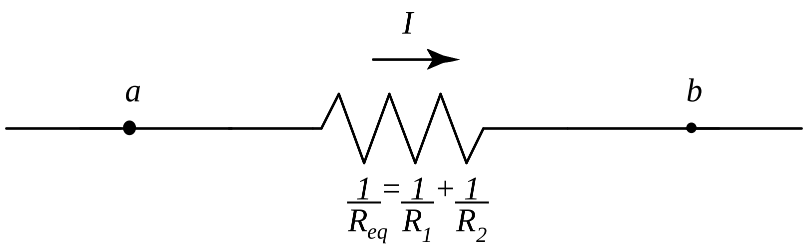


Figura 6.7: Três resistências em paralelo.

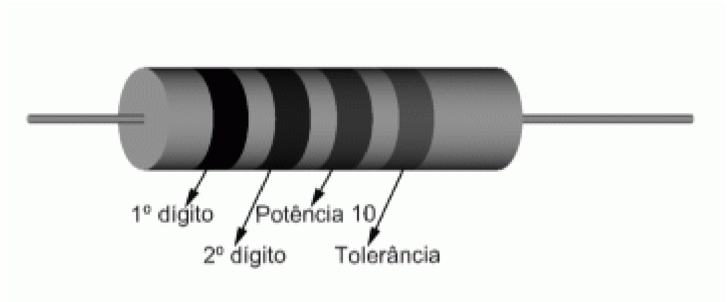


Figura 6.8: Aspecto físico de uma resistência.

0	Preto
1	Castanho
2	Vermelho
3	Laranja
4	Amarelo
5	Verde
6	Azul
7	Violeta
8	Cinzento
9	Branco

Tabela 6.2: Código de cores para as duas primeiras bandas.

10^{-2}	Prateado
10^{-1}	Dourado
10^{0}	Preto
10^{1}	Castanho
10^{2}	Vermelho
10^{3}	Laranja
10^{4}	Amarelo
10^{5}	Verde
10^{6}	Azul
10^{7}	Violeta
10^{8}	Cinzento

Tabela 6.3: Código de cores para a potência de 10.

O valor da resistência com as quatro bandas de cor pode ser escrita como

$$R = (a \times 10 + b)\, m \pm \text{tolerância}$$

onde a e b são os valores da primeira e segunda bandas, respectivamente, e m é a nossa potência de 10. O código de cores referente às duas primeiras bandas é fornecido na tabela 6.2. O código de cores da potência de 10 e da tolerância estão nas tabelas 6.3 e 6.4, respectivamente.

Considere uma resistência com as bandas amarela, violeta, laranja e dourada. Escrevemos a

2%	Vermelho
5%	Dourado
10%	Prateado
20%	nenhuma

Tabela 6.4: Código de cores para a tolerância.

sua resistência como:

$$\begin{aligned} R &= (4 \times 10 + 7)\, 10^3 \pm 5\% \\ &= 47\,\mathrm{k}\Omega \pm 5\% \end{aligned}$$

Na prática, para calcularmos o valor da resistência pô-mos os valores dos dois primeiros dígitos ordenados, neste caso 47, e multiplicamos pela potência de 10 a que corresponde a terceira banda, neste caso 10^3.

Em Electrónica, na maior parte das vezes, quando se fala em resistências, costuma empregar-se a seguinte notação:

$$\begin{aligned} \mathrm{k}\Omega &\longrightarrow \text{k} \\ \mathrm{M}\Omega &\longrightarrow \text{M} \end{aligned}$$

Assim, quando nos encontramos no laboratório em vez de dizermos uma resistência de $2\,\mathrm{k}\Omega$ dizemos, por vezes, simplesmente, 2 k (dois kapa).

Para além disso, costuma usar-se outra notação que pode ser facilmente compreendida com um exemplo:

$$2,3\,\mathrm{k}\Omega \longrightarrow 2,3\ \text{k} \longrightarrow 2\text{k}3$$

Dizemos, portanto, 2k3 em vez de $2,3\,\mathrm{k}\Omega$.

6.8.3 Amperímetros, Voltímetros e Ohmímetros (opcional)

Os dispositivos que medem corrente, diferença de potencial, e resistência são chamados amperímetros, voltímetros, e ohmímetros, respectivamente. Frequentemente, estes três medidores estão incluídos num só, a que se dá o nome de **multímetro,** que pode funcionar em cada um dos três modos atrás descritos.

Podemos usar um voltímetro para medir a voltagem aos terminais da bateria dum carro e um ohmímetro para medir a resistência entre dois pontos em qualquer aparelho eléctrico em casa (como uma torradeira) quando suspeitamos de um curto-circuito ou de um fio partido.

Para medir a corrente através de uma resistência num circuito simples, colocamos um amperímetro em série com a resistência, como se mostra na figura 6.9, de maneira que o amperímetro e a resistência sejam atravessados pela mesma corrente. Uma vez que o amperímetro possui alguma resistência, a corrente no circuito decresce levemente quando o amperímetro é inserido. Idealmente, o amperímetro deve possuir uma resistência muito pequena para que a corrente a ser medida seja só levemente afectada.

A diferença de potencial numa resistência é medida colocando um voltímetro em paralelo com a resistência, como se mostra na figura 6.10, de modo que a queda de potencial no voltímetro seja

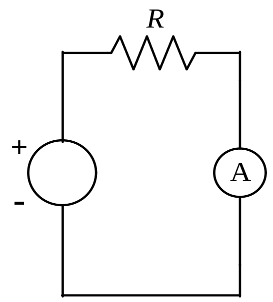


Figura 6.9: Para medir a corrente na resistência R , um amperímetro é colocado em série com a resistência para que receba a mesma corrente que a resistência.

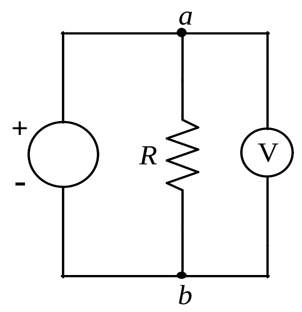


Figura 6.10: Para medir a queda de potencial numa resistência, um voltímetro é colocado em paralelo com a resistência para que a queda de potencial seja a mesma no voltímetro e na resistência.

a mesma que através da resistência. O voltímetro reduz a resistência entre os pontos a e b, aumentando assim a corrente total no circuito e mudando a queda de potencial através da resistência. Um bom voltímetro tem uma resistência muito grande de maneira a que o seu efeito no circuito seja mínimo.

O componente principal de um amperímetro e de um voltímetro é um galvanómetro, um dispositivo que detecta a passagem de pequenas correntes através dele. O galvanómetro é desenhado de maneira que a escala de leitura é proporcional à corrente que passa. Um galvanómetro típico usado em laboratórios de estudantes consiste num enrolamento de fio (solenóide) no campo magnético de um íman permanente. Quando o enrolamento transporta uma corrente, o campo magnético exerce um binário no enrolamento fazendo com que este rode. Um ponteiro ligado ao enrolamento indica a leitura numa escala. O enrolamento por si só contribui com uma pequena resistência quando o galvanómetro é colocado num circuito. Muitos medidores hoje em dia têm um mostrador digital em vez de um indicador e uma escala, mas a sua operação básica é semelhante à aqui ilustrada.

Para construir um amperímetro a partir de um galvanómetro, colocamos uma pequena resistência chamada resistência shunt em paralelo com o galvanómetro. A resistência do shunt é normalmente muito mais pequena do que a resistência do galvanómetro de maneira que a maior parte da corrente passa pela resistência shunt. Assim, a resistência equivalente do amperímetro é aproximadamente igual à resistência do shunt, e muito mais pequena do que a resistência do galvanómetro por si só.

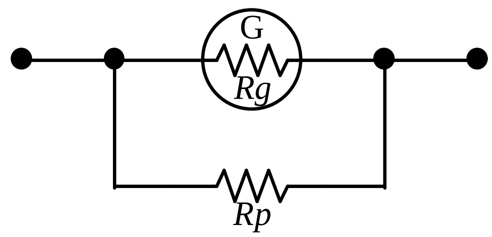


Figura 6.11: Um amperímetro consiste num galvanómetro cuja resistência é R_g e uma pequena resistência em paralelo R_p.

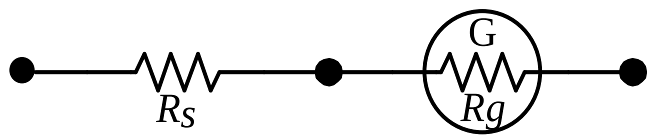


Figura 6.12: Um voltímetro consiste num galvanómetro cuja resistência é R_g e uma grande resistência em série R_s.

Para construir um voltímetro, colocamos uma resistência de valor elevado em série com o galvanómetro para que a resistência equivalente do voltímetro seja muito maior do que a resistência do galvanómetro por si só.

As figuras 6.11 e 6.12 ilustram a construção de um amperímetro e de um voltímetro a partir de um galvanómetro. A resistência do galvanómetro R_g é mostrada separadamente nestes esquemas, mas é de facto parte do galvanómetro.

Um ohmímetro simples consiste numa bateria ligada em série com um galvanómetro e uma resistência, como se mostra na figura 6.13

A resistência R_s é escolhida de modo a que quando os terminais a e b são postos em curto-circuito (postos em contacto eléctrico, com uma resistência negligenciável entre eles), a corrente através do galvanómetro provoca uma deflexão completa na escala. Assim, uma deflexão completa

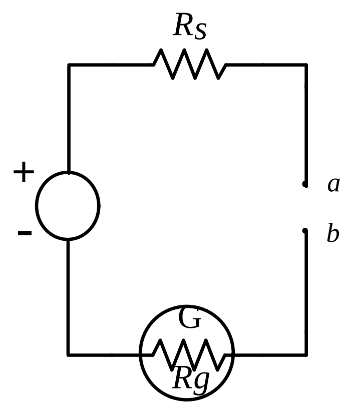


Figura 6.13: Um ohmímetro consiste numa bateria em série com um galvanómetro e uma resistência R_s, escolhida de modo a que quando os terminais a e b são postos em curto-circuito, a corrente através do galvanómetro provoca uma deflexão completa na escala escolhida.

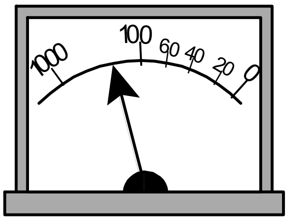


Figura 6.14: Quando uma resistência R é ligada em a e b, a agulha do galvanómetro deflecte uma quantidade que depende do valor de R. A escala do galvanómetro é calibrada de maneira a dar uma leitura em ohms.

indica a não existência de qualquer resistência entre os terminais a e b. Nenhuma deflexão indica uma resistência infinita entre os terminais. Quando os terminais são ligados a uma resistência desconhecida R, a corrente através do galvanómetro depende de R, por isso a escala pode ser calibrada para dar uma leitura directa de R, como se mostra na figura 6.14. Devido ao facto de o ohmímetro mandar corrente através da resistência que se pretende medir, algum cuidado deve ser tomado quando se usa este aparelho. Por exemplo, não devemos medir a resistência de um amperímetro sensível com um ohmímetro, porque a corrente fornecida pela bateria no ohmímetro iria provavelmente danificar o amperímetro.

6.9 Potência eléctrica

Apresenta-se nesta secção sem dedução a fórmula para a perda de potência numa resistência

$$P = VI \tag{6.15}$$

onde I é a corrente que percorre a resistência e V é diferença de potencial aos seus terminais.

Este resultado é geral independentemente se o material (neste caso o material que constitui a resistência) é ou não óhmico. Se o material for óhmico então temos também que $V = RI$ e podemos escrever

$$P = RI^2 = \frac{V^2}{R} \tag{6.16}$$

Exercício 6.5 Um aquecedor eléctrico é construído aplicando uma diferença de potencial de $120\,\mathrm{V}$ a um fio de níquel-crómio que tem uma resistência total de $8,00\,\Omega$. Encontre a corrente transportada pelo fio e a potência do aquecedor.

Resolução: $I = \frac{V}{R} = \frac{120\,\mathrm{V}}{8.00\,\Omega} = 15.0\,\mathrm{A}$; $P = VI = 120\,\mathrm{V} \times 15.0\,\mathrm{A} = 1.80 \times 10^3\,\mathrm{W}$.

Exercício 6.6 Um fio de níquel-crómio é usado vulgarmente como o elemento de aquecimento em equipamentos eléctricos. Um destes fios com $1,0\,\mathrm{m}$ de comprimento é usado na parte de baixo de um forno e pode suportar uma corrente máxima de $16\,\mathrm{A}$ quando é aplicada uma diferença de potencial de $120\,\mathrm{V}$ às extremidades do fio. Se a resistividade do fio é $1,0 \times 10^{-6}\,\Omega\,\mathrm{m}$:

(a) Qual é o raio do fio?

(b) Qual a potência usada pelo forno?

Resolução:

(a) $\left\{\begin{array}{c} R = \frac{\rho L}{A} = \frac{\rho L}{\pi r^2} \\ R = \frac{V}{I} \end{array}\right. \longrightarrow \frac{V}{I} = \frac{\rho L}{\pi r^2} \longrightarrow r^2 = \frac{\rho L I}{\pi V} \longrightarrow r = \sqrt{\frac{(1.0\times 10^{-6}\,\Omega\,\mathrm{m})(1.0\,\mathrm{m})(16\,\mathrm{A})}{\pi(120\,\mathrm{V})}} =$ $2.06013 \times 10^{-4}\,\mathrm{m} \approx 0.20\,\mathrm{mm}.$

(b) $P = VI = 120\,\mathrm{V} \times 16\,\mathrm{A} = 1920\,\mathrm{W} \approx 1.9 \times 10^3\,\mathrm{W}.$

Exercício 6.7 Uma lâmpada de $100\,\mathrm{W}$ é deixada acesa numa dispensa exterior para impedir que a tinta congele. Os $100\,\mathrm{W}$ correspondem à potência dissipada no filamento da lâmpada, que é uma simples resistência. Se a electricidade custa 8 cêntimos/kWh, quanto custa manter a lâmpada acesa 3 meses durante o inverno?

Resolução:

$$\frac{8\text{ cêntimos}}{\mathrm{kW\,h}} \times \frac{\mathrm{kW\,h}}{1000\,\mathrm{W\,h}} \times \overbrace{100\,\mathrm{W} \times \overbrace{\left(\frac{24\,\mathrm{h}}{1\text{ dia}} \times \frac{30\text{ dia}}{1\text{ mês}} \times 3\text{ meses}\right)}^{\text{tempo em }\mathrm{h}}}^{\text{energia em }\mathrm{W\,h}} = \frac{8\text{ cêntimos}}{1000\,\mathrm{W\,h}} \times \overbrace{100\,\mathrm{W} \times \overbrace{(2160\,\mathrm{h})}^{\text{tempo em }\mathrm{h}}}^{\text{energia em }\mathrm{W\,h}}$$
$= 8$ cêntimos $\times 216 = 1728$ cêntimos.

Nota: Assumiu-se que no Inverno o mês médio tem a duração de 30 dias. Manteve-se cêntimos pois não se sabe se é euro ou outra moeda.

Capítulo 7

Magnetismo

Neste capítulo iniciamos o estudo dos fenómenos físicos relacionados com o Magnetismo. Assim como ocorreu com a Eletricidade, a observação dos primeiros fenómenos magnéticos remonta à Antiguidade Clássica. Na região da Magnésia[1], localizada na região grega da Tessália, os pastores perceberam que um tipo de rocha, conhecida hoje como magnetite, atraía pedaços de ferro, como os pregos de suas sandálias, por exemplo. A magnetite é um minério de ferro, de fórmula Fe_3O_4, que pode ser encontrado na natureza na forma magnetizada.

Os materiais que se comportam como a magnetite são conhecidos como ímans, e provavelmente a aplicação mais importante dos efeitos magnéticos, pelo menos até ao século XIX, foi a invenção da bússola pelos chineses no século I, sem a qual as grandes navegações e descobrimentos não teriam sido possíveis. A bússola deve sua enorme utilidade como instrumento de orientação ao fato de que a sua agulha é um íman, que se orienta na direção norte-sul geográfica (aproximadamente, ver mais acerca disto abaixo), o que permitiu as viagens através dos oceanos, pois não havia outra forma de estabelecer rotas marítimas[2]. Por volta de 1600, o inglês William

[1] Magnésia em grego antigo significa "lugar das pedras mágicas" pois ali se encontram fontes naturais de magnetite que "magicamente" se atraíam.

[2] As estrelas do céu do hemisfério norte não são as mesmas que aparecem no céu do hemisfério sul. Além disso, durante uma tempestade prolongada, o céu estaria nublado, o que impediria a orientação pelas estrelas.

Figura 7.1: Magnetite.

Figura 7.2: Uma bússola.

Gilbert publicou o seu livro *De Magnete*. Este foi o primeiro tratado exaustivo sobre a força magnética; foi nele que a força magnética recebeu o seu nome e foi identificada como uma força diferente da força electrostática. Gilbert demonstrou que varetas metálicas carregadas eletricamente não interagem com as bússolas, desde que não haja movimento de cargas. Portanto, a ação magnética deve estar ligada à corrente elétrica que passa pelo fio, o que é reforçado pelo fato de que, se invertermos o sentido da corrente, a agulha será defletida para o outro lado. Assim, deve existir uma força magnética agindo sobre a bússola, e essa força, em analogia com a força elétrica, deve ter um campo magnético associado. Esse campo magnético deve ser produzido pela corrente do fio, e a Terra também deve possuir um campo semelhante, que orienta a bússola em condições normais. Gilbert deduziu assim, que a Terra deve ser um íman gigante com polos magnéticos denominados norte e sul. A força entre polos iguais é repulsiva e entre polos diferentes é atractiva. A grande diferença em relação à força electrostática, como Gilbert salientou, é que não existem polos norte ou sul separadamente; qualquer íman tem sempre os dois polos.

Em 1750, John Michell descobriu que a intensidade das forças produzidas por cada polo num íman são iguais e diminuem proporcionalmente ao quadrado da distância.

A explicação para o alinhamento na direção norte-sul da agulha da bússola adveio de uma experiência realizada em 1820 pelo físico dinamarquês Hans Christian Oersted. Nessa experiência, ele verificou que, quando passa uma corrente elétrica por um fio, a agulha de uma bússola colocada perto desse fio é desviada da direção norte-sul, desvio esse que é tanto mais perceptível quanto maior for a corrente que percorre o fio ou a proximidade entre o fio e a bússola. De fato, para uma intensidade suficiente de corrente ou uma certa distância entre o fio e a bússola, a agulha desta se coloca perpendicularmente ao fio. Isto significa que a agulha sofre um tipo de influência gerada pelo fio. A Terra também produz esse tipo de influência, já que a agulha, em condições normais, fica orientada sempre na direção norte-sul. Como a agulha da bússola era feita de um material magnético, a influência sofrida por ela deveria estar relacionada com essa propriedade, já que as outras interações conhecidas à época, que eram as interações gravitacionais e elétricas,

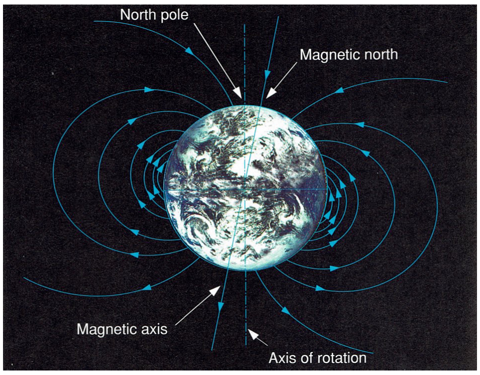


Figura 7.3: O campo magnético terrestre.

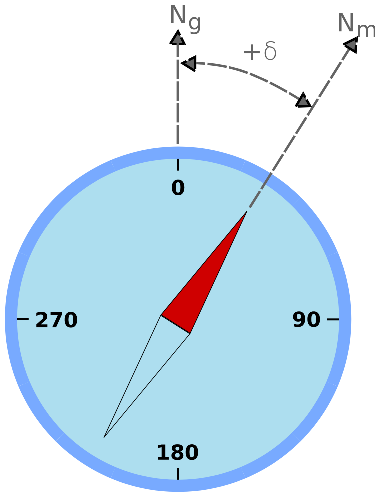


Figura 7.4: A declinação magnética.

não poderiam ser responsáveis por esses efeitos. Note-se que a bússola pode ser colocada no plano horizontal, o que elimina o efeito gravitacional. E supondo-se que a agulha tivesse uma carga elétrica, ela poderia ser descarregada simplesmente se fosse encostada ao chão.

Numa bússola (que é basicamente um íman fino e longo que é suportado no seu centro por forma a poder girar), o polo norte define-se como o polo que aponta na direção do polo norte geográfico, o polo oposto da bússola aponta no sentido do polo sul geográfico e é, portanto, designado por polo sul da bússola. De tal forma que o polo sul magnético da Terra se encontra no polo norte geográfico e o polo norte magnético da Terra se encontra no polo sul geográfico.

A diferença angular entre o norte magnético e o norte verdadeiro (definido em referência ao polo geográfico norte, de um determinado ponto na Terra, é chamado de declinação magnética.

Ao longo das eras geológicas, a orientação do campo magnético terrestre (e o dos outros planetas) pode mudar, de modo que o norte magnético se torna sul e vice-versa - um acontecimento conhecido como inversão geomagnética.

Como já vimos cada íman possui um polo norte numa das extremidades e um polo sul na outra. A força magnética é mais forte perto das extermidades. A força entre polos iguais é repulsiva e entre polos diferentes é atrativa. Vale a pena notar a semelhança com as cargas elétricas, cargas

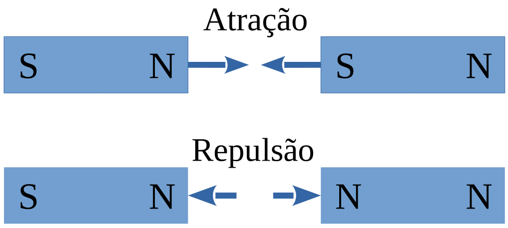


Figura 7.5: A atração e repulsão entre ímans.

elétricas iguais repelem-se, cargas elétricas diferentes atraem-se. No entanto, ao contrário das cargas elétricas que podem existir isoladamente, os polos magnéticos nunca ocorrem isoladamente, ou seja, aparecem sempre aos pares.

7.1 Propriedades magnéticas da matéria: ferromagnetismo, diamagnetismo e paramagnetismo

O magnetismo é uma propriedade dos átomos que tem origem na sua estrutura atómica. É resultado da combinação do momento angular orbital e do momento angular de spin do elétron. A forma como ocorre a combinação entre esses momentos angulares determina como o material irá se comportar na presença de outro campo magnético. É de acordo com esse comportamento que as propriedades magnéticas dos materiais são definidas.

Grosso modo os materiais podem ser divididos em três categorias principiais:

- Diamagnéticos: são materiais que, se colocados na presença de um campo magnético externo, estabelecem em seus átomos um campo magnético em sentido contrário ao que foi submetido, mas que desaparece assim que o campo externo é removido. Em virtude desse comportamento, esse tipo de material não é atraído por ímans. São exemplos: mercúrio, ouro, bismuto, chumbo, prata, grafite, vidro, etc.

- Paramagnéticos: pertencem a esse grupo os materiais que possuem electrões desemparelhados, que, ao serem submetidos a um campo magnético externo, ficam alinhados no mesmo sentido do campo ao qual foram submetidos, que desaparece assim que o campo externo é retirado. São materiais fracamente atraídos pelos ímans, como: alumínio, platina, sódio, magnésio, cálcio etc.

- Ferromagnéticos: quando esses materiais são submetidos a um campo magnético externo, adquirem campo magnético no mesmo sentido do campo ao qual foram submetidos, que permanece quando o material é removido. É como se possuíssem uma memória magnética. Eles são fortemente atraídos pelos ímans, e esse comportamento é observado em poucas substâncias, entre elas estão: ferro, níquel, cobalto e alguns de seus compostos.

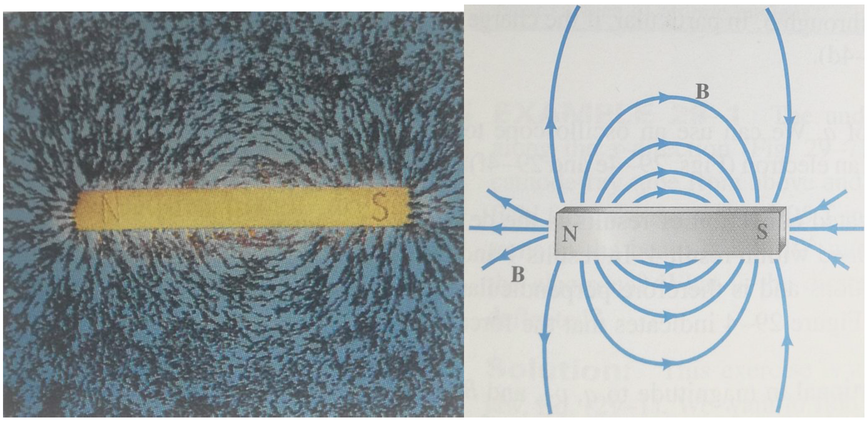


Figura 7.6: Campo magnético $\mathbf{B}$ perto de um íman e as linhas de indução magnética. À esquerda o que acontece na realidade, à direita o que preconiza a teoria.

7.2 Campo de indução magnética

(Nota: Esta secção é um excerto da sec 8.1 do livro *electromagnetismo* de Jaime Villate)

A existência de um campo de indução magnética pode ser estabelecida por meio de uma bússola. Se a bússola tem uma tendência para apontar numa determinada direcção, é porque existe um campo de indução magnética $\mathbf{B}$, no ponto onde a bússola se encontra; por definição, a direcção do campo $\mathbf{B}$ é a direcção da agulha da bússola. Juntando continuamente os pontos do espaço, de acordo com a direcção do campo $\mathbf{B}$, obtemos linhas contínuas denominadas linhas de indução magnética. As linhas de indução magnética de um íman saem do polo norte magnético, entrando pelo polo sul, e continuando dentro do íman na direcção do polo norte formando uma curva fechada.

Para definir o módulo do campo de indução magnética, usamos partículas de prova tal como fizemos no caso do campo eléctrico. Quando uma partícula de carga q entra com uma velocidade $\mathbf{v}$ numa região onde existe um campo de indução magnética, sobre ela atua uma força $\mathbf{F}$ que apresenta as seguintes propriedades:

1. A força é directamente proporcional ao módulo da velocidade (v) da partícula quando a direcção da velocidade da partícula é constante.

2. Se a velocidade é paralela a $\mathbf{B}$, a força é nula; a força é máxima nas direções em que a velocidade é perpendicular às linhas de indução magnética. Em geral, o módulo da força depende do seno do ângulo θ formado pelo vector velocidade e as linhas de indução magnética.

3. Num determinado ponto, a força sobre partículas com a mesma velocidade e diferentes cargas q é directamente proporcional a q. Os três resultados anteriores implicam uma força magnética da forma

$$F = qvB\sin\theta \tag{7.1}$$

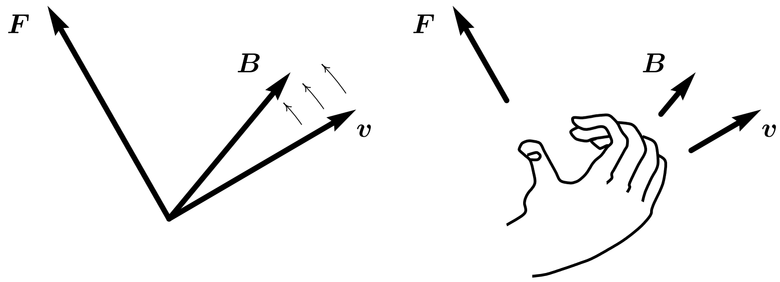


Figura 7.7: A regra da mão direita.

onde B é a constante de proporcionalidade e define o módulo do campo de indução magnética.

4. A direção e sentido da força são dados pela chamada regra da mão direita como se mostra na figura 7.7: a força é perpendicular tanto a $\mathbf{v}$ como a $\mathbf{B}$ e na direção que aponta o dedo polegar quando os outros dedos rodam de $\mathbf{v}$ para $\mathbf{B}$.

Os quatro resultados anteriores podem ser sintetizados na seguinte fórmula empírica: a forca magnética $\mathbf{F}$ sobre uma partícula de carga q e velocidade $\mathbf{v}$, num ponto onde existe um campo de indução magnética $\mathbf{B}$, é igual a

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{7.2}$$

onde $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ é o produto vectorial dos vectores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{B}$. Está fora do âmbito desta sebenta introduzir a definição do produto vectorial entre dois vectores (também designado por produto externo).

A unidade do SI para o campo magnético é o tesla (T).

Exercício 7.1 Um electrão (cuja carga e massa são, respectivamente: $-1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ e $9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$) move-se com uma velocidade de $1.0 \times 10^{7}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, formando um ângulo de $30\,°$ com o eixo dos $y's$. Existe um campo magnético de $10\,\mathrm{T}$, orientado segundo o eixo positivo dos $y's$. Encontre a aceleração instantânea a que o electrão está sujeito.

Resolução:
$\begin{cases} F = ma \\ F = |q|\,|v|\,B\sin\theta \end{cases}$ $a = \frac{F}{m} = \frac{|q||v|B\sin\theta}{m} = \frac{1.60\times10^{-19}\,\mathrm{C}\times1.0\times10^{7}\,\mathrm{m\,s^{-1}}\times10\,\mathrm{T}\sin(30\,°)}{9.11\times10^{-31}\,\mathrm{kg}} = 8.781\,558\,7 \times 10^{18}\,\mathrm{m\,s^{-2}} \approx 8.8 \times 10^{18}\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

Bibliografia

Alonso M & Finn E J [1999]. *Física*, Addison-Wesley.

Bloomfield L A [2010]. *How Things Work: The Physics of Everyday Life*, 4th edn, John Wiley & Sons, Inc.

Coletta V P [1995]. *College Physics*, WCB - McGraw-Hill.

de Almeida G [2002]. *Sistema Internacional de Unidades (SI): Grandezas e Unidades Físicas - Terminologia, Símbolos e Recomendações*, 3 edn, Plátano-Edições Técnicas.

de Deus J D, Pimenta M, Noronha A, Peña T & Brogueira P [2000]. *Introdução à Física*, 2nd edn, McGraw-Hill.

Fishbane P M, Gasiorowicz S & Thornton S [1996]. *Physics for Scientists and Engineers*, 2nd extended edn, Prentice-Hall, Inc.

Halliday D, Resnick R & Walker J [2001]. *Fundamentals of physics*, extended international 6th edn, John Wiley & Sons, Inc.

Levenson E [1994]. *Teaching children about physical science: ideas and activities every teacher and parent can use*, TAB Books.

P. Bevington D K R [2002]. *Data Reduction and Error Analysis for The Physical Sciences*, 3rd edn, McGraw-Hill Higher Education.

Serway R A & Jewett J W [2003]. *Physics for Scientists and Engineers*, 6th edn, Brooks Cole.

Taylor J R [1997]. *An Introduction to Error Analysis: The Study of Uncertainties in Physical Measurements*, University Science Books.

Tipler P A [1999]. *Physics for Sientists and Engineers*, 4th edn, W.H. Freeman and Company.